

Tema 12. Funciones

Resumen

- Una función es una relación entre dos conjuntos definida de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde exactamente otro elemento (uno y sólo uno) del segundo conjunto.
 - En una función intervienen dos variables, una independiente y otra dependiente. La independiente suele designarse por la letra x ; la dependiente suele llamarse y . Si el par (x, y) pertenece a la función f , se dice que $y = f(x)$.
- Puede indicarse así: $x \rightarrow y = f(x)$. El elemento y es la imagen de x mediante f .
- El conjunto de valores que puede tomar x (la variable independiente) es el conjunto dominio.
 - El conjunto de valores que toma y (la variable dependiente) se llama recorrido o imagen.

Ejemplos:

a) La relación “a cada número natural le corresponde su siguiente” es una función. Esta función asocia, por ejemplo, a $2 \rightarrow 3$; a $9 \rightarrow 10$. En general, a $n \rightarrow n + 1$.

Esta relación es una función porque para todo número natural siempre existe el siguiente y es único.

Su dominio es $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$; su imagen $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. El 0 no es de la imagen, pues no es el siguiente de ningún número natural.

b) La relación “a cada fracción se le asocia otra equivalente a ella” no es una función, pues la imagen no es única; así, por ejemplo, a $2/3 \rightarrow 4/6$ o $20/30$, o infinitas más.

Modos de dar una función

Una función puede darse mediante una tabla, una gráfica, una fórmula o un enunciado.

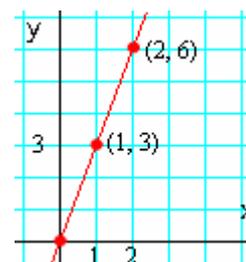
Ejemplo:

El enunciado “a cada número real le corresponde su triple” puede expresarse por la fórmula $f(x) = 3x$.

Así, para: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$: par $(0,0)$; para $x = 1 \rightarrow f(1) = 3$: par $(1, 3)$; etc.

Los pares de elementos relacionados suelen darse con ayuda de una tabla. En este caso:

x	0	1	2	3	4	...
$f(x)$	0	3	6	9	12	...

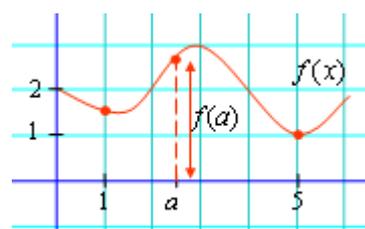


Representando en el plano cartesiano esos pares (puntos $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 6)$...) y uniéndolos mediante una línea continua se obtiene la gráfica de dicha función.

En el eje horizontal, el de abscisas, se representa la variable independiente; en el vertical, de ordenadas, la variable dependiente.

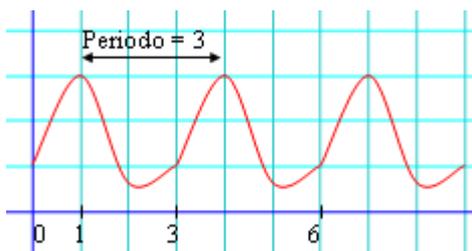
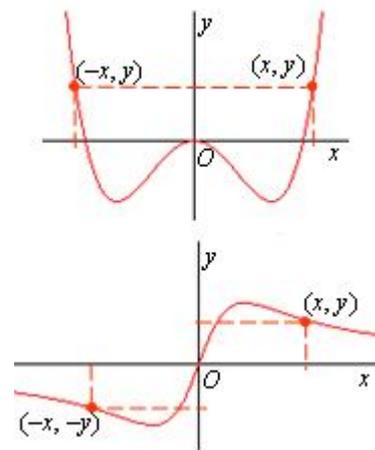
- Cuando una función se da mediante una gráfica todos los puntos de esa línea corresponden a pares de números relacionados entre sí por la función. Para cada punto (x_0, y_0) de la gráfica, y_0 es la imagen de x_0 ; esto es, $y_0 = f(x_0)$.

En la figura adjunta, $f(1) = 1,5$ y $f(5) = 1$.



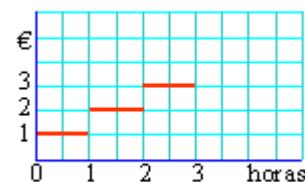
Algunas características de las funciones

- Simetría respecto del eje OY. Una función es simétrica respecto del eje OY cuando para cualquier valor x de su dominio se cumple que $f(-x) = f(x)$.
- Simetría respecto del origen O. Una función es simétrica respecto del origen cuando para cualquier valor x de su dominio se cumple que $f(-x) = -f(x)$.
- Una función es periódica si hay algún número k tal que $f(x+k) = f(x)$ para todo x . Esto significa que su gráfica se repite cada k unidades.

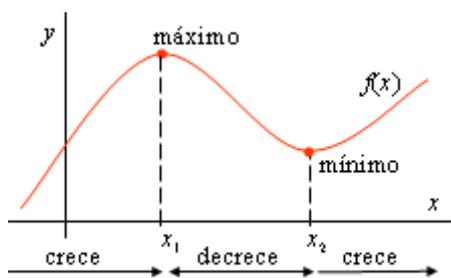
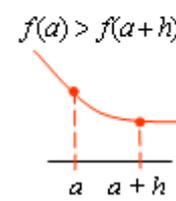
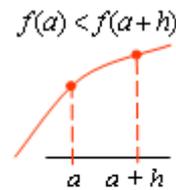


- Una función es continua en un intervalo cuando puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel: su gráfica no presenta saltos. Así, las tres funciones de arriba son continuas.
- Los puntos en los que la gráfica de la función efectúa un salto se llaman puntos de discontinuidad.

Ejemplo: La función que da el coste de un parking dependiendo del tiempo de permanencia de un coche viene dada por la gráfica adjunta. En este caso el coste es de 1 € por hora o fracción. Esta función es discontinua, da un salto, al cumplirse la primera hora, la segunda,...



- Una función es creciente en un intervalo cuando toma cada vez valores mayores; esto es, cuando $f(a) < f(a+h)$ para a y $a+h$ puntos del intervalo y $h > 0$. (Al trasladarse la x hacia la derecha, la función sube.)
- Una función es decreciente en un intervalo cuando toma cada vez valores menores; esto es, cuando $f(a) > f(a+h)$ para a y $a+h$ puntos del intervalo y $h > 0$. (Al trasladarse la x hacia la derecha, la función baja.)
- Una función tiene un máximo relativo en el punto x_1 cuando $f(x_1)$ es mayor que la imagen de cualquier punto próximo a x_1 . (La función es creciente a la izquierda de x_1 y decreciente a su derecha.)
- Una función tiene un mínimo relativo en el punto x_2 cuando $f(x_2)$ es menor que la imagen de cualquier punto próximo a x_2 . (La función es decreciente a la izquierda de x_2 y creciente a su derecha.)



Ejemplo: La función dada por la gráfica adjunta: es creciente en los intervalos (1, 2) y (4, 6); es decreciente en los intervalos (0, 1), (2, 4) y (6, 7). Tiene máximos en los puntos $x = 2$ y $x = 6$; y mínimos en $x = 1$ y $x = 4$.

