# Tema 3 (I). Polinomios Resumen

Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se suman o restan los términos semejantes; los términos no semejantes se dejan como estaban.

**Ejemplos:**

a) $(5x^2-3x-6)+(3x^3-2x^2+5)=3x^3+(5x^2-2x^2)-3x+(-6+5)=3x^3+3x^2-3x-1$.

b) $(5x^2-3x-6)-(3x^3-2x^2+5)=3x^3+(5x^2+2x^2)-3x+(-6-5)=3x^3+7x^2-3x-11$.

Multiplicación de polinomios

Se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo: "todos por todos". Esto es, se aplica la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación. Una vez realizados los productos deben agruparse los términos semejantes.

**Ejemplo:**

$$(4x^2-5x-6)\cdot(2x^2-3x)=$$

$$=(4x^2\cdot(2x^2))+(4x^2\cdot(-3x))+(-5x\cdot(2x^2))+(-5x\cdot(-3x))-(6\cdot(2x^2))-(6\cdot(-3x))=$$

$$=8x^4-12x^3-10x^3+15x^2-12x^2+18x=8x^4-22x^4-10x^3+3x^2+18x$$

Productos notables:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

**Ejemplos**:

a) $(4x+5)^2=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 5+5^2=16x^2+40x+25$.

b) $(x^2+3)^2=x^4+6x^2+9$.

c) $(5-2x^2)^2=5^2-2\cdot 5\cdot 2x^2+(2x^2)^2=25-20x^2+4x^4$

d) $(4x-6)^2=16x^2-48x+36$.

e) $(4x+3)\cdot(4x-3)=(4x)^2-3^2=16x^2-9$.

f) $(2+3x^2)\cdot(2-3x^2)^2=4-9x^4$.

División de polinomios

Para dividir polinomios hay que escribirlos en orden decreciente; a continuación se hace el cociente entre los términos principales... Se recuerda el algoritmo con el siguiente ejemplo, siendo el dividendo $D(x)=6x^4+15x^3-17x-2$, y el divisor $d(x)=2x^2-3x$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^4 & +15x^3 & & -17x-2 & 2x^2-3x \\ \cline{5-5}
-6x^4 & +9x^3 & & & 3x^2+12x+18 \\ \cline{1-4}
 & 24x^3 & & -17x-2 & \\
 & -24x^3 & +36x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 36x^2 & -17x-2 & \\
 & & -36x^2 & -54x & \\ \cline{3-4}
 & & & -71x-2 &
\end{array}$$

$6x^4/2x^2=3x^2$

$24x^3/2x^2=12x$

$36x^2/2x^2=18$

Observación: Como en la división ordinaria, en el caso de polinomios, se cumple que:

$$D(x)=d(x)\cdot c(x)+r(x) \Leftrightarrow \frac{D(x)}{d(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$$

Así, en la división de $D(x)=6x^4+15x^3-17x-2$ entre $d(x)=2x^2-3x$, el cociente es $c(x)=3x^2+12x+18$, y el resto, $r(x)=-71x-2$; entonces:

se cumple: $(2x^2-3x)\cdot(3x^2+12x+18)+(-71x-2)=6x^4+15x^2-17x-2$

y también: $\dfrac{6x^4+15x^2-17x-2}{2x^2-3x}=3x^2+12x+18+\dfrac{-71x-2}{2x^2-3x}$

Regla de Ruffini para la división de $P(x)$ entre $(x - a)$

Sólo puede utilizarse para dividir un polinomio cualquiera entre el binomio $x - a$.
Para aplicar la regla, los coeficientes del dividendo se colocan ordenados (de mayor a menor grado, incluido el término independiente); si faltase alguno de ellos, se pone un 0.

**Ejemplo:** Para dividir $D(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x - 12$ entre $d(x) = x - 2$ se procede así:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficientes del dividendo | | 2 | –5 | 0 | 6 | –12 | |
| Valor de $a$ | 2 | | 4 | –2 | –4 | 4 | |
| Coeficientes del cociente | | 2 | –1 | –2 | 2 | –8 | ← Resto |

El cociente de la división es $c(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 2$; el resto, $r = -8$.

Valor numérico de un polinomio, para un valor de $x = a$, es el número que resulta cuando en él se sustituye $x$ por $a$. Si el polinomio es $P(x)$ ese valor se denota por $P(a)$.

**Ejemplo:** El valor numérico de $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x + 6$ para $x = -1$ es:

$$P(-1) = (-1)^4 - 4\cdot(-1)^3 + 5\cdot(-1) + 6 = 1 + 4 - 5 + 6 = 6.$$

Análogamente, $P(2) = 2^4 - 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2 + 6 = 16 - 32 + 10 + 6 = 0$.

Raíz de un polinomio

Raíz de un polinomio es cada uno de los valores de $x = a$ para los que $P(a) = 0$. En este caso se dice que $a$ es una raíz o un cero de $P(x)$.

- Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

**Ejemplos**:

a) Para el polinomio del ejemplo anterior, $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x + 6$, una de sus raíces es $x =$ 2, pues $P(2) = 0$. (Para el mismo polinomio, $x = -1$ no es raíz.)

b) $x = -2$ es una raíz de $P(x) = 2x^3 - 5x + 6$, pues $P(-2) = 2\cdot(-2)^3 - 5\cdot(-2) + 6 = 0$.

- Para polinomios de grado mayor que 2 se conoce el siguiente criterio: Si un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces enteras estas deben ser divisores del término independiente.

Por ejemplo, para $P(x) = 2x^3 - 5x + 6$, como el término independiente vale 6 sus posibles raíces enteras hay que buscarlas entre los divisores de 6, que son 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 y –6. Hay que probar con paciencia.

Para $x = 1$, $P(1) = 3 \Rightarrow x = 1$ no es raíz. Para $x = -2$, $P(-2) = 0 \Rightarrow x = -2$ SÍ es raíz...

Si se continúa probando se verá que este polinomio no tiene más raíces enteras.

- Un polinomio puede tener la misma raíz varias veces, pudiéndose hablar de raíz doble, triple…

Teorema del resto

El resto de la división de $P(x) : (x - a)$ es igual al valor numérico de $P(x)$ para $x = a$.

- Esto permite saber el resto de la división sin necesidad de hacerla, pues $r = P(a)$.

**Ejemplos:**

a) En la división de $D(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x - 12$ entre $d(x) = x - 2$ se vio que el resto valía –8. Como puede verse coincide con $D(2) = 2\cdot 16 - 5\cdot 8 + 6\cdot 2 - 12 = -8$.

b) La división de $P(x) = x^3 - 4x$ entre $x - 1$ da de resto –3, pues $P(1) = 1^3 + 4\cdot(-1) = -3$.

c) El resto de la división de $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$ entre $x + 2$ vale $P(-2) = 0$. Esto significa que $x = -2$ es raíz de $P(x)$. Nótese que en este caso la división es exacta.

Teorema del factor

"La condición necesaria y suficiente para que $(x-a)$ sea un factor de $P(x)$ es que $P(a)=0$".

O lo que es lo mismo:

Si $P(a)=0$ ⇔. $x = a$ es una raíz de $P(x)$ ⇔ $(x-a)$ es un factor del polinomio $P(x)$ ⇔
⇔ $P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$. Por tanto, $P(x)$ puede escribirse como producto de dos factores.

Nota: Por cada raíz que se conozca se tiene un factor. Así, por ejemplo, si 2, 3 y –5 son raíces de un polinomio de tercer grado, entonces $x - 2$, $x - 3$ y $x + 5$ son sus factores. Por tanto dicho polinomio puede ser $P(x)=(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+5)$; y no sería necesario escribirlo por extensión, auque, si se desea, multiplicando se obtiene: $P(x)=x^3-19x+30$.

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de sus factores irreducibles, los de menor grado posible: análogo al concepto de factor primo para los números.

• Un factor polinómico es irreducible si es de primer grado o cuando no tiene ninguna raíz real. Por ejemplo $x^2+1$ es irreducible; también es irreducible $x + 3$.

• Todos los factores de primer grado son irreducibles, en particular los de la forma $x-a$; pero también los del tipo $ax+b$.

**Ejemplo:**

$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ puede escribirse como producto de $(x-2)\cdot(x^2-2x-3)$. El primer factor es irreducible, pero el segundo, no, pues $(x^2-2x-3) = (x+1)\cdot(x-3)$.

Por tanto, la factorización de $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ será: $P(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$.

Esquema para factorizar un polinomio

El teorema del factor permite escribir un polinomio como producto de factores de menor grado. Para ello puede hacerse lo que se indica a continuación:

1.º Si puede sacarse factor común $x$, se saca.

2.º Hay que encontrar una de sus raíces. (Para polinomios de segundo grado se encuentran resolviendo la ecuación $P(x)=0$; Si el polinomio es de grado mayor o igual a 3, buscando raíces enteras entre los divisores del término independiente.)

3.º Cuando se conozca alguna raíz, se divide por Ruffini para obtener factores de menor grado, y, por tanto, más cómodos de manejar: Si $x = a$ es una raíz de $P(x)$ → se divide por $x-a$ y se escribe $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$.

4.º A continuación, se repite el mismo proceso con $P_1(x)$.

**Ejemplos:**

Para $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6$ se puede sacar factor común 2:

$$P(x)=2x^3-10x^2+14x-6 = 2(x^3-5x^2+7x-3).$$

A continuación hay que encontrar alguna raíz entera. Puede ser un divisor de –3: 1, –1, 3 y –3.

Vale $x = 1$, pues $P(1) = 0 \Rightarrow (x - 1)$ es un factor $\Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - 1)$.

Se divide por Ruffini y se obtiene: $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=2(x-1)(x^2-4x+3)$

Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$. Sus soluciones son $x = 1$ y $x = 3$ ⇒ $(x-1)$ y $(x - 3)$ son los factores.

En consecuencia: $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=2(x-1)(x-1)(x-3)=2(x-1)^2(x-3)$.

En este caso, la solución $x = 1$ es doble, pues el factor $(x - 1)$ se repite dos veces.