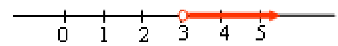
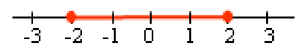
Tema 5. Inecuaciones Resumen

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Por ejemplo: $2x-7<x-2$.
La solución de una inecuación son los valores de las incógnitas que cumplen la desigualdad.
En general, una inecuación admite infinitas soluciones; el conjunto de soluciones suele darse en forma de intervalo. La noción y representación gráfica de intervalos puede recordarse en:
http://iescomplutense.es/wp-content/uploads/2010/10/ESO-3-T02-Numeros-reales-resumen1.pdf

Ejemplos:
a) La solución de la inecuación $3x>6$ son todos los números mayores que 3: intervalo (3, +∞).
También puede indicarse así: $x > 3$. Y Gráficamente: 

b) La solución de la inecuación $x^2 \le 4$ son todos los números mayores o iguales que –2 y menores o guales que 2: intervalo [–2, 2]. Gráficamente: 

- Para resolver una inecuación hay que tener en cuenta las propiedades del orden, de las desigualdades:

Si $a \le b \Rightarrow$ (1) $a+c \le b+c$; (2) $a\cdot c \le b\cdot c$, si $c > 0$; (3) $a\cdot c \ge b\cdot c$, cuando $c < 0$.

Estas propiedades permiten trasponer términos de un miembro a otro y despejar la incógnita.
La tercera propiedad hay que aplicarla con sumo cuidado: es la que genera más errores.

Inecuaciones lineales con una incógnita. Son de la forma $ax+b \ge 0$.
Se solucionan aplicando las propiedades anteriores.

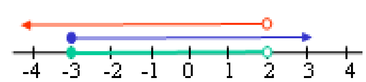
$ax+b \ge 0 \Rightarrow ax \ge -b \Rightarrow x \ge -b/a$, si $a > 0$; $x \le -b/a$, si $a < 0$.

Ejemplos:
a) Para resolver la inecuación $3x>6$ se dividen por 2 ambos miembros: se obtiene $x>3$.
b) Para resolver $2x-7<x-2$, se traspone 7 al segundo miembro, y la x del segundo miembro, al primer miembro. Queda: $2x-x<-2+7 \Rightarrow x>5$.
c) Para resolver $3-2x \le 9$, si se traspone el 3 queda $2x \le 9-3 \Leftrightarrow -2x \le 6$. Ahora puede dividirse por –2, pero debe cambiarse el sentido de la desigualdad; así: $x \ge -3$.

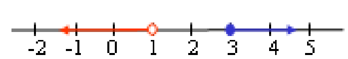
Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita. Son de la forma: $\begin{cases} a\,\mathrm{x}+b \ge 0 \\ a\acute{}x+b\acute{} \ge 0 \end{cases}$

La solución de estos sistemas se obtiene resolviendo, por separado, cada una de las inecuaciones que lo componen y hallando los valores comunes a las soluciones encontradas.

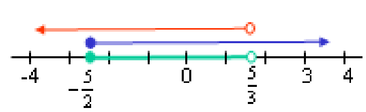
Ejemplos:



a) Los valores de x que cumplen el sistema $\begin{cases} x \ge -3 \\ x < 2 \end{cases}$ son los del intervalo $-3 \le x < 2 \Leftrightarrow x \in$ [–3, 2).



b) El sistema $\begin{cases} x \ge 3 \\ x < 1 \end{cases}$ no tiene solución.

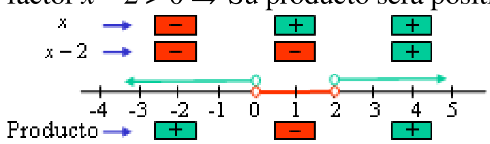


c) El sistema $\begin{cases} 2x+7 \ge 2 \\ 1-3x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge -5 \\ -3x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -5/2 \\ x < 5/3 \end{cases}$
Esto es, el intervalo [–5/2, 5/3).

Inecuaciones de segundo grado

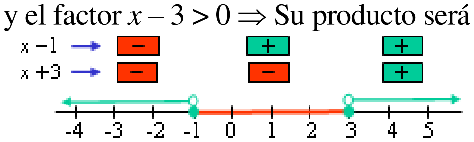
Son de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$. (El símbolo $\geq$ puede ser sustituido por $\leq$, $>$ o $<$)
Su resolución está ligada a la solución de su ecuación asociada, $ax^2 + bx + c = 0$, pues si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación, entonces $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$.
Estudiando los signos de cada factor se determinan los intervalos solución.
Es útil representar las soluciones x_1 y x_2 en la recta real y estudiar el signo de $a(x - x_1)(x - x_2)$ en los intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) y $(x_2, +\infty)$.

Ejemplos:
a) Para resolver la inecuación $x^2 - 2x < 0$:
1) Se resuelve la ecuación asociada $x^2 - 2x = 0$. Sus soluciones son $x = 0$ y $x = 2$.
En consecuencia, $x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow x(x-2) < 0$.
2) Los valores $x = 0$ y $x = 2$ dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty, 0)$; $(0, 2)$; $(2, +\infty)$.
3) Estudiando el signo de cada factor en los intervalos anteriores se obtiene:
Si $x < 0$, el factor $x < 0$, y el factor $x - 2 < 0 \Rightarrow$ Su producto será positivo.
Si $0 < x < 2$, el factor $x > 0$, y el factor $x - 2 < 0 \Rightarrow$ Su producto será negativo.
Si $x > 2$, el factor $x > 0$, y el factor $x - 2 > 0 \Rightarrow$ Su producto será positivo.



4) La solución de la inecuación $x^2 - 2x < 0$ son los puntos pertenecientes al intervalo $(0, 2)$.

b) Para resolver la inecuación $x^2 - 2x - 3 \geq 0$:
1) Se resuelve la ecuación asociada $x^2 - 2x - 3 = 0$. Sus soluciones son $x = -1$ y $x = 3$.
En consecuencia, $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geq 0$.
2) Los valores $x = -1$ y $x = 3$ dividen la recta real en tres intervalos: $(-\infty, -1)$; $(-1, 3)$; $(3, +\infty)$.
3) Estudiando el signo de cada factor en los intervalos anteriores se obtiene:
Si $x < -1$, el factor $x + 1 < 0$, y el factor $x - 3 < 0 \Rightarrow$ Su producto será positivo.
Si $-1 < x < 3$, el factor $x + 1 > 0$, y el factor $x - 3 < 0 \Rightarrow$ Su producto será negativo.
Si $x > 3$, el factor $x + 1 > 0$, y el factor $x - 3 > 0 \Rightarrow$ Su producto será positivo.



4) Solución de la inecuación dada es cada uno de los puntos pertenecientes al intervalo $(-\infty, -1]$ o al intervalo $[3, +\infty)$. Esto es, $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. Los valores $x = -1$ y $x = 3$ deben incluirse pues la inecuación es el tipo $\geq$.

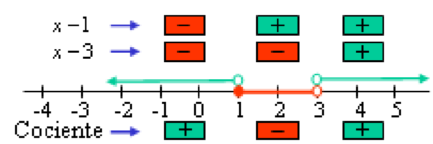
Ampliación: otras inecuaciones

Inecuaciones de grado superior a dos. Son inecuaciones de la forma $P(x) < 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado superior a 2. (El símbolo $<$ puede ser sustituido por $\leq$, $>$ o $\geq$)
Se resuelven descomponiendo $P(x)$ en factores y estudiando el signo de cada uno de ellos.
Es útil representar las soluciones de $P(x) = 0$ en la recta real y estudiar el signo de $P(x)$ en los intervalos que se obtienen.

Ejemplo:
Para resolver la inecuación $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$:
1) Se descompone $P(x)$ en factores. En este caso (ver Conceptos básicos del Tema 3) se obtiene $P(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$.
2) Los valores $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$ dividen la recta real en 4 intervalos: $(-\infty, -1)$; $(-1, 2)$; $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$.
3) Estudiando el signo de cada factor en los intervalos anteriores se obtiene:
Si $x < -1$, el producto $(x+1)(x-2)(x-3) < 0$.
Si $-1 < x < 2$, el producto $(x+1)(x-2)(x-3) > 0$.
Si $2 < x < 3$, el producto $(x+1)(x-2)(x-3) < 0$.
Si $x > 3$, el producto $(x+1)(x-2)(x-3) > 0$.
4) La solución de la inecuación $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$ son los puntos pertenecientes al intervalo $(-1, 2)$ o al intervalo $(3, +\infty)$. Esto es, $x \in (-1, 2) \cup (3, +\infty)$.

Inecuaciones racionales. En ellas la incógnita aparece en un denominador. Para resolverla hay que expresarla en la forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ (sin más términos). (El símbolo $\leq$ puede ser: $<$, $>$ o $\geq$)
Las soluciones se obtienen analizando los signos $A(x)$ y $B(x)$, para determinar el signo del cociente. Una buena estrategia consiste en señalar sobre una recta las soluciones de $A(x) = 0$ y de $B(x) = 0$, e ir estudiando el signo del cociente en los sucesivos intervalos que se presenten.

Ejemplos:
a) La inecuación $\dfrac{1}{x-1} < 0$ se cumple siempre que $x < 1$.
b) La inecuación $\dfrac{3}{x-3} > 0$ se cumple siempre que $x > 3$.
c) La inecuación $\dfrac{x-1}{x-3} \leq 0$ se cumple siempre que x está entre 1 y 3, incluido el valor 1. Esto es: cuando $1 \leq x < 3$; intervalo $[1, 3)$.



Inecuaciones con valor absoluto. Son de la forma $|A(x)| < n$, $n \geq 0$.
Para resolverlas aplicaremos la propiedad del valor absoluto: $|A(x)| < k \Leftrightarrow -k < A(x) < k$
La inecuación $|ax + b| < n \Leftrightarrow -n < ax + b < n \Leftrightarrow -n + b < ax < n - b$
La inecuación $|ax + b| > n$ se cumple si: $ax + b < -n$ o $ax + b > n$.

Ejemplo: $|x-3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Inecuaciones con expresiones radicales. Pueden ser de la forma: $\sqrt{A(x)} < n$; $\sqrt{A(x)} > n$
Sus soluciones se obtienen resolviendo las inecuaciones equivalentes asociadas:

$$\sqrt{A(x)} < n \Rightarrow 0 \leq A(x) < n^2; \qquad \sqrt{A(x)} > n \Rightarrow A(x) > n^2$$

Ejemplo: $\sqrt{2x-6} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2x - 6 < 4 \Leftrightarrow 6 \leq 2x < 10 \Leftrightarrow 3 \leq x < 5$.