

Tema 6. Semejanza (I)

Resumen

Para recordar los conceptos elementales de semejanza puede venir bien ir a:

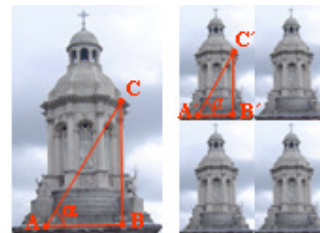
<http://iescomplutense.es/wp-content/uploads/2010/10/ESO-2-T09-II-Resumen-Tales.pdf>

Definición de semejanza: Dos figuras son semejantes cuando las medidas (las distancias) en una de ellas son proporcionales a las correspondientes en la otra. El cociente de ambas medidas se llama razón de semejanza, k

Que no haya deformaciones significa que los ángulos formados en una de ellas son iguales a los correspondientes en la otra.

Ejemplos:

a) La razón de semejanza entre las dos fotografías de la derecha es $k = 0,5$. Si se divide la medida de cualquier distancia de la foto pequeña por su correspondiente en la otra, el cociente es 0,5: $\frac{\text{distancia}(A', B')}{\text{distancia}(A, B)} = 0,5$. Igualmente, $\frac{\text{distancia}(A', C')}{\text{distancia}(A, C)} = 0,5$.



Los ángulos de vértice A y A' son iguales.

b) Los triángulos de vértices A, B, C y A', B', C', dibujados en las fotografías también son semejantes.

Semejanza en superficies

En las fotografías de la página anterior, puede observarse que las cuatro fotos pequeñas ocupan la misma superficie que la foto semejante más grande. Esto es así porque la razón de semejanza es $k = 1/2$.

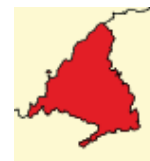
En efecto, si las dimensiones de la foto grande son x e y , las de la pequeña serán $x/2$ e $y/2$.

Luego, el área de la grande será $S = xy$; y la de la pequeña, $S' = \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{4} = \frac{S}{4} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{1}{4}$.

- En general, si dos figuras son semejantes con razón de semejanza k , la razón de semejanza de sus áreas será k^2 .

Ejemplo:

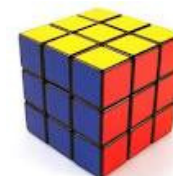
La comunidad de Madrid tiene una superficie aproximada de 8000 km². En un mapa a escala 1 : 100000 (aquí $k = 0,00001 = 10^{-5}$), la comunidad de Madrid tendrá una superficie de $8000 \cdot (10^{-5})^2 = 8000 \cdot 10^{-10} \text{ km}^2 = 0,8 \text{ m}^2$.



Semejanza en volúmenes

En la figura adjunta puede observarse un cubo de Rubik. En cada cara del cubo se dibujan 9 cuadrados, cuyo lado es 1/3 del lado de la cara grande.

La razón de semejanza de las áreas de las caras de los cubos es $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.



El cubo grande está formado por 27 cubos más pequeños. La razón de semejanza de las aristas de los cubos es 1/3. Si V es el volumen del cubo grande y V' el de

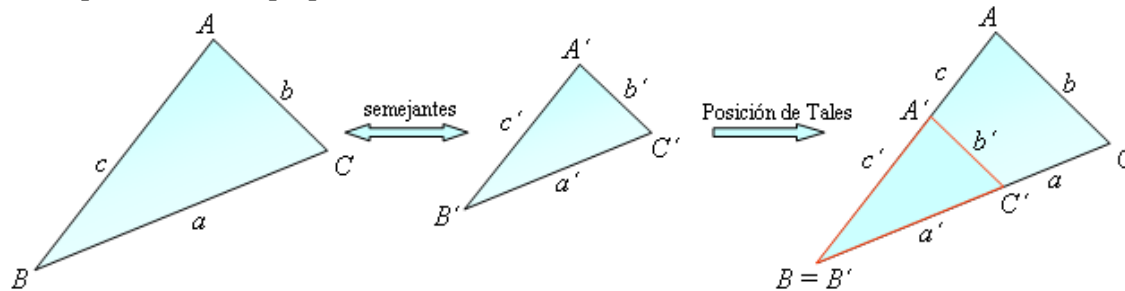
cada cubo pequeño, se cumple que $V = 27 \cdot V' \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$.

- En general, si dos figuras son semejantes con razón de semejanza k , la razón de semejanza de sus volúmenes será k^3 .

Observación: Si dos figuras semejantes están construidas con material de la misma densidad, la razón de semejanza de sus pesos también será k^3 .

Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen iguales los ángulos y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.



Se cumple que:

$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

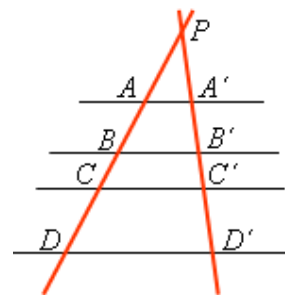
Si dos triángulos son semejantes pueden superponerse un ángulo y los dos lados que lo forman; los lados no comunes serían paralelos; se dice que están en posición de Tales.

Teorema de Tales

El teorema de Tales relaciona las longitudes de los segmentos obtenidos al cortar un conjunto de rectas paralelas por dos rectas cualesquiera. Se puede formular como sigue:

“Si se tiene un conjunto de rectas paralelas y son cortadas por otras dos rectas, entonces, las medidas de los segmentos determinados en una de las rectas secantes son proporcionales a las medidas de los segmentos determinados en la otra.”

Por tanto: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$. Igualmente: $\frac{PA}{AA'} = \frac{PB}{BB'} = \frac{PC}{CC'}$.



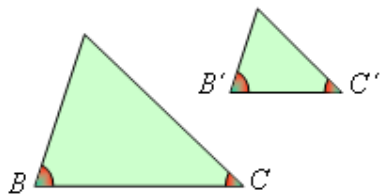
Nótese que si los segmentos en una de las rectas fuesen iguales, también lo serían en la otra.

Criterios de semejanza de triángulos

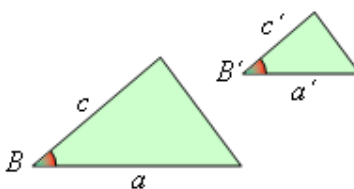
Para determinar que dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar que tienen iguales sus tres ángulos y proporcionales sus tres lados; basta con asegurarse de que cumplen alguno de los siguientes criterios, llamados de semejanza de triángulos.

- Primer criterio: Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales.
- Segundo criterio: Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman.
- Tercer criterio: Dos triángulos son semejantes si tienen los lados correspondientes proporcionales

Primer criterio



Segundo criterio



Tercer criterio

