

Tema 7. Razones trigonométricas

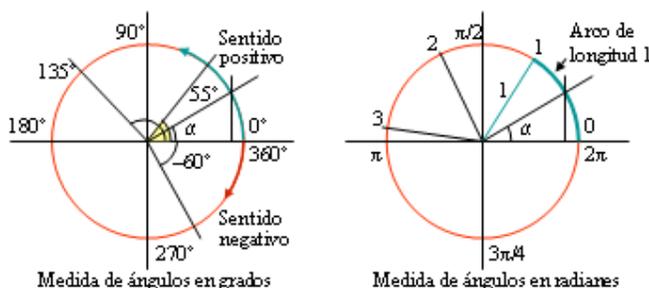
Resumen

Medida de ángulos

Un ángulo α puede medirse en grados o en radianes.

Para representar y medir ángulos suele recurrirse a una circunferencia centrada en el origen. El vértice de cada ángulo se sitúa en el centro, siendo uno de sus lados el eje positivo OX ; los ángulos se consideran positivos si se miden en sentido inverso al movimiento de las manecillas de un reloj, y negativos en el mismo sentido de dicho movimiento.

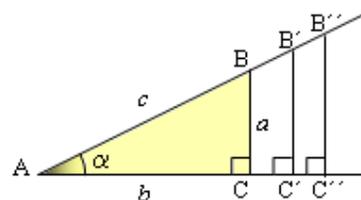
- El grado es una medida sexagesimal: un ángulo completo (una vuelta completa) mide 360° . Un ángulo recto mide 90° y un llano, 180° .
- El radian es una medida longitudinal, numérica real: un radian es un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que ha sido trazado. En una circunferencia de radio 1 una vuelta completa son 2π radianes; un cuarto de vuelta son $\pi/2$ radianes; y media vuelta, π radianes.



Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Dado un ángulo cualquiera, α , que se sitúa en un triángulo rectángulo como el de la figura, se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, como siguen:

$$\text{sen } \alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}; \quad \text{tag } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$



ACLARACIONES:

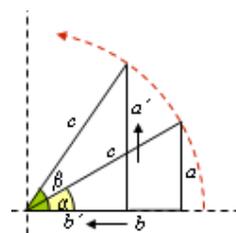
- 1) El seno relaciona la medida de la altura (del cateto opuesto al ángulo) con la de la hipotenusa; el coseno, la medida de la base (del cateto contiguo al ángulo) con la hipotenusa.
- 2) La tangente relaciona la altura con la base (desplazamiento vertical respecto al horizontal). La tangente mide la pendiente del ángulo, la inclinación de la hipotenusa.
- 3) Las razones trigonométricas no dependen de las medidas de los lados del triángulo: sólo dependen del valor del ángulo. (El seno, el coseno o la tangente de α valen lo mismo en cualquiera de los triángulos de arriba: ABC , $AB'C'$, $AB''C''$...). Esto permite tabular los valores de estas razones. En las calculadoras pueden obtenerse con las teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= 0,5; \quad \sin 35^\circ = 0,573\dots; \quad \cos 40^\circ = 0,766\dots; \quad \cos 70^\circ = 0,342\dots; \\ \tan 3^\circ &= 0,052\dots; \quad \tan 88^\circ = 28,636\dots \end{aligned}$$

- 4) Para ángulos más grandes el seno es mayor, mientras que el coseno es menor; pero sus valores siempre estarán entre 0 y 1, ya que la hipotenusa (el denominador) siempre mide más que los catetos. El valor de la tangente aumenta desde 0 hasta infinito a medida que el ángulo se hace más grande, desde 0° a 90° .)

$$\text{Así: } \text{sen } \alpha = \frac{a}{c} < \text{sen } \beta = \frac{a'}{c'}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{b}{c} > \text{cos } \beta = \frac{b'}{c'}$$



Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas de un ángulo

Para cualquier ángulo α se cumplen las tres relaciones siguientes:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tag} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad 1 + \operatorname{tag}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Por tanto, conociendo una cualquiera de las razones trigonométricas se pueden determinar las demás.

Ejemplos:

a) Para $\alpha = 25^\circ$, $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = (0,4226\dots)^2 + (0,9063\dots)^2 = 0,1786\dots + 0,8213\dots = 1$.

También puede comprobarse que $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \frac{0,4226\dots}{0,9063\dots} = 0,4663\dots$, y $\tan 25^\circ = 0,4663\dots$

b) Estas relaciones se aplican para determinar las restantes razones trigonométricas a partir de una de ellas. Así:

- Si se sabe que $\sin \alpha = 0,8$, entonces:

$$0,8^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 0,36 \rightarrow \cos \alpha = \pm 0,6.$$

El valor de $\operatorname{tag} \alpha = \frac{0,8}{\pm 0,6} = \pm 1,33\dots$

- Si $\operatorname{tag} \alpha = 2 \Rightarrow 1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tag} \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{5}} \cdot 2 = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Nota: El doble signo de los resultados está relacionado con la periodicidad y con la simetría de las funciones trigonométricas. Más adelante se matiza este hecho.

ADVERTENCIAS:

Significado de algunas cuestiones de notación:

- $\sin^2 \alpha$ se lee seno cuadrado de α y su significado es: $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2 = (\sin \alpha) \cdot (\sin \alpha)$;
- $\sin \alpha^2$ se lee seno de α al cuadrado y su significado es $\sin \alpha^2 = \sin(\alpha^2) = \sin(\alpha \cdot \alpha)$
- $\sin 2\alpha$ se lee seno de dos alfa; su significado es: $\sin 2\alpha = \sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha)$.
- $2 \sin \alpha$ se lee dos seno de alfa; su significado es: $2 \sin \alpha = 2 \cdot (\sin \alpha) = \sin \alpha + \sin \alpha$.

Lo mismo para el coseno y la tangente.

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

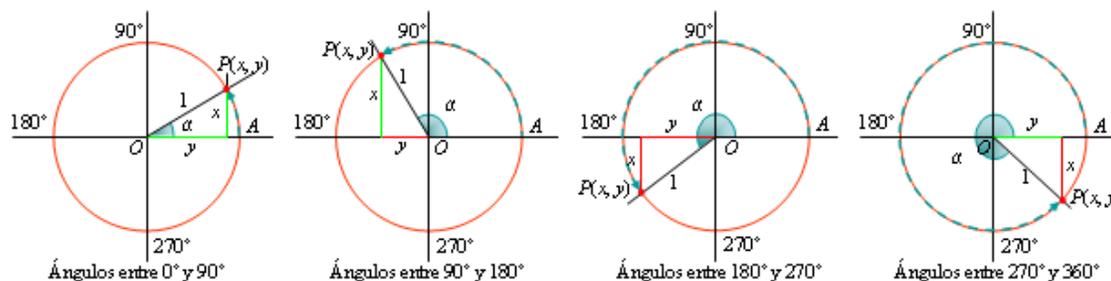
Para definir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera suele recurrirse a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio 1. El vértice de cada ángulo se sitúa en el centro, siendo uno de sus lados el eje positivo OX , lado OA ; el otro lado puede abrirse determinando ángulos entre 0° y 360° ; además ese lado corta a la circunferencia en un punto de coordenadas $P(x, y)$. El ángulo es AOP .

- Los ángulos entre 0° y 90° cortan a la circunferencia en el primer cuadrante, siendo las coordenadas de $P(x, y)$ ambas positivas. Además, para cualquier ángulo α se tiene:

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y \rightarrow \text{cateto opuesto: valor de la abscisa de } P(x, y)$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x \rightarrow \text{cateto contiguo: valor de la ordenada de } P(x, y)$$

- Para ángulos mayores de 90º se generaliza el resultado anterior. Esto es, para cualquier ángulo α , determinado por los puntos $A(1, 0)$, $O(0, 0)$ y $P(x, y)$, se define:
 $\text{sen } \alpha = y$, el valor de la ordenada de $P(x, y)$; $\text{cos } \alpha = x$, el valor de la abscisa de $P(x, y)$

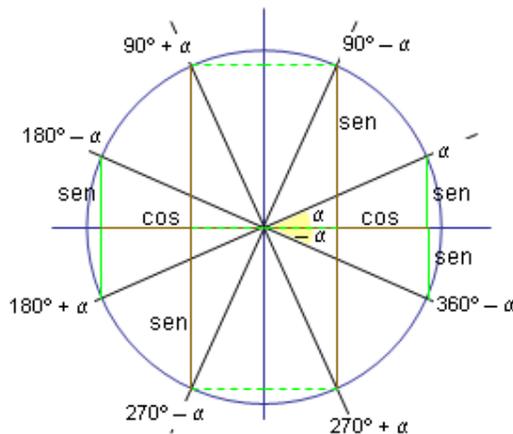


Como puede observarse en los dibujos anteriores:

- El seno de un ángulo es positivo cuando mide entre 0º y 180º (primero y segundo cuadrante); es negativo cuando está en los cuadrantes tercero y cuarto.
- El coseno de un ángulo es positivo cuando mide entre 0º y 90º o entre 270º y 360º (primero y cuarto cuadrante); es negativo cuando está en los cuadrantes segundo y tercero.

Relación entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

- Complementarios:
 $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$ $\text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$ $\text{tag}(90^\circ - \alpha) = 1/\text{tag } \alpha$
- Suplementarios:
 $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$ $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha$ $\text{tag}(180^\circ - \alpha) = -\text{tag } \alpha$
- Opuestos:
 $\text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha$ $\text{cos}(360^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$ $\text{tag}(360^\circ - \alpha) = -\text{tag } \alpha$
- Ángulos + 90º:
 $\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \text{cos } \alpha$ $\text{cos}(90^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$ $\text{tag}(90^\circ + \alpha) = -1/\text{tag } \alpha$
- Ángulos + 180º:
 $\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$ $\text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha$ $\text{tag}(180^\circ + \alpha) = \text{tag } \alpha$



Ejemplos:

- De $\text{sen } 25^\circ = 0,4226 \Rightarrow \text{cos } 65^\circ = \text{sen } 155^\circ = \text{cos } 295^\circ = 0,4226$;
 $\Rightarrow \text{cos } 115^\circ = \text{sen } 205^\circ = \text{cos } 245^\circ = \text{cos } 335^\circ = \text{sen}(-25^\circ) = -0,4226$
- De $\text{cos } 25^\circ = 0,9063 \Rightarrow \text{sen } 65^\circ = \text{sen } 115^\circ = \text{cos } 335^\circ = \text{cos}(-25^\circ) = 0,9063$;
 $\Rightarrow \text{cos } 155^\circ = \text{cos } 205^\circ = \text{sen } 245^\circ = \text{sen } 295^\circ = -0,9063$