

LÍMITES Y CONTINUIDAD (Pendientes de Matemáticas CCSS)

1. Comprueba dando valores que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{x^2 + 1} = 1,2$

2. Halla, por sustitución (si se puede), los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x+3}{x^2-4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{2x-5}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-5}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x+3}{x^2+x-1}}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+x-1}}$ g) $\lim_{x \rightarrow 2} (e^{2x-3})$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + 3)$

(Sol. a) -2; b) -9/32; c) 3; d) No existe; e) $\sqrt{5}$; f) $1/\sqrt{5}$; g) e; h) 4.

3. Halla el límite de:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, cuando $x \rightarrow 0$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ 3x/(x-2) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$, cuando $x \rightarrow -1$

Sol. a) 0; b) No existe.

4. Dada la función $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)x}{(x-3)(x-2)(x+1)}$, halla su límite cuando x tiende a 3, 0, -2, 2 y -1. (Sol. 15/4; 0; 0; ∞ ; ∞ .)

5. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{2x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x^2-4}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x+1}{2x-1}$
 (Sol. a) ∞ ; b) -3/2; c) -1/4; d) ∞ .)

6. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$ b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2-4}$ d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-3}{(x-4)^2}$
 (Sol. 0; b) $\pm\infty$; c) $\pm\infty$; d) ∞)

7. Halla:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x-5}$ c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$
 (Sol. a) ∞ ; b) 10; c) ∞ ; d) 6.)

8. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x + 7)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x^2 - 10x + 17)$.
 d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x}$ e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-14}{x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-5}$

(Sol: a) ∞ ; b) $-\infty$; c) ∞ ; d) 0; e) 0; f) 0.)

9. Halla: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2-4x+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x}{5x^2-4x+1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x}{2x+7}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2+8x}{x-4}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+8x}{x-4}$

(Sol. a) 0; b) 2/5; c) 2/5; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) $+\infty$.)

Continuidad de funciones y aplicaciones

10. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{b) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad \text{c) } f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

Sol. a) \mathbf{R} ; b) $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$; c) \mathbf{R} .

11. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, ¿para qué valores de a la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? Comprueba gráficamente que tu resultado es correcto. (Sol. 1.)

12. (PAU) Calcula la constante k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 5 \\ 4x + k & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \qquad (\text{Sol. 4.})$$

13. (PAU) Calcula la constante k para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ x + k & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \qquad (\text{Sol. 6.})$$