Matemáticas II **TEMA 7**

Límites y continuidad de funciones

Problemas Propuestos

Definición de límites

1. Demuestra, aplicando la definición, que $\lim_{x\to 3}(2x-4)=2$.

2. Demuestra, aplicando la definición, que $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x+8}=2$.

Cálculo de límites por métodos algebraicos

3. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}$ b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^4-x^3-x^2}{x^3-4x^2+5x}$

4. Halla, en función de los valores de *p*, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-px}{x^2-3x+2}$ b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-p}$

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$ c) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$

6. Calcula:

a) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+10x}{x^3-3x+4}$ b) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-4}{2x-5x^2}$ c) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-2}{x^2+12x}$

7. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{4x^2+3x}}$ b) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{2x-1}$ c) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}}$

8. A partir de la definición del número *e*, $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, utilizando las propiedades de los límites, demuestra que.

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{px}=e^p$ b) $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{px}\right)^{px}=e$, $p\neq 0$ c) $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{p}{x}\right)^{x}=e^p$

9. Aplicando los resultados anteriores calcula:

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ b) $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$ c) $\lim_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$

10. Teniendo en cuenta que, $\lim\limits_{A(x)\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{A(x)}\right)^{A(x)}=e$ y la propiedad: "Si $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)}$", demuestra que si se cumple que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)=1$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x)\right)=\infty$, entonces, la indeterminación $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^{\infty}\right]$, puede resolverse aplicando la transformación: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^{\infty}\right]=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$

11. Aplicando la transformación anterior, halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+5x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

12. Halla el valor de *a* para que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2}\right)^{ax+2}=2$

13. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)$

14. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\dfrac{2}{x+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\cos\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\tan\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$

15. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x+3}{x-2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)$

16. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}3^{1/(x-2)}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{x/(x+2)}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3^x-9}{3^{x+1}}\right)$

17. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x^2+1}\right)^{\frac{-3x+2}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^{\frac{-3x+2}{x-1}}$

18. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-3}{x-3}-\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x-3}-\dfrac{x^3+3}{x^2}\right)$

19. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$

Asíntotas de una función

20. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x-1}$. Indica la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

21. Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$, halla con detalle sus asíntotas; e indica la posición de la curva respecto a ellas.

23. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$.

24. Sea $f(x)=\dfrac{4-2x^2}{x}$. Halla su dominio y sus asíntotas.

25. ¿Existe algún valor de p para el que la función $f(x)=\dfrac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}$ tenga solamente una asíntota vertical?

26. Comprueba que la función $f(x)=2x+\sin x$ no tiene asíntotas.

27. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{-x^2}$ b) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ c) $f(x)=e^{x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$

28. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(x-3)$ b) $f(x)=\log\dfrac{1}{x}$ c) $f(x)=\log\left(x^2-4\right)$ d) $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$

Continuidad

29. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x)=x^3+8$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-8}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+8}$

e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$ f) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ g) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$

i) $f(x)=e^{x-2}$ j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ k) $f(x)=\log(5x-6)$ l) $f(x)=\log\dfrac{1}{x^2+2}$

m) $f(x)=\tan 2x$ n) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ o) $f(x)=\cos(2x-1)$ p) $f(x)=\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$

30. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1 \\ x-1, & \text{si } x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x\le 1 \\ x-1, & \text{si } x>1 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{si } x\le 0 \\ x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x\le 0 \\ \sin x, & \text{si } x>0 \end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{-1}{x-2}, & \text{si } x>1 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{si } x\le 1 \\ \ln(2-x) & \text{si } x>1 \end{cases}$

31. Estudia la continuidad de función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$. ¿Si tuviese alguna discontinuidad evitable cómo podría evitarse?

32. Determina el tipo de discontinuidades que presenta la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$.

33. Dependiendo de los valores de *p*, ¿tiene la función $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-px+1}$ alguna discontinuidad? Si la tuviese, ¿podría evitarse en algún caso?

34. La función $f(x)=\dfrac{x^2+kx+4}{x^2-4}$ es discontinua en los puntos $x = -2$ y $x = 2$. Podría evitarse alguna discontinuidad para algún valor de *k*?

35. ¿Para qué valores de *a* es continua en $x = 1$ la función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1 \\ 2x+a, & \text{si } x>1 \end{cases}$?

36. Determina los valores de *a* y *b* que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} \sin x-a & x<-\pi \\ \cos x+b & -\pi\le x<0 \\ e^x-1 & x\ge 0 \end{cases}$ sea continua en todo **R**.

37. Determina la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=|x-1|$ b) $f(x)=|x^2-2x|$

<u>Teorema de Bolzano</u>

38. Enuncia el teorema de Bolzano. Aplicando dicho teorema comprueba que la función $f(x)=2x^3-5x^2+x+1$ corta al eje *OX* en el intervalo [–1, 1].

39. Comprueba que la ecuación $e^{-x}+2x-1=0$ tiene una raíz en el intervalo [–2, –1]. Calcula un valor de esa raíz con una aproximación del orden de las centésimas.

40. Comprueba que el polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0{,}2$ tiene dos raíces negativas y otra positiva. Da una solución aproximada de la raíz positiva

41. Determina los valores que puede toma *p* para que la función $f(x) = 2x^3 + px^2 - 3$ corte al eje de abscisas como se indica:
a) Una vez en el intervalo [–1, 0].
b) Una vez en el intervalo [0, 1].
c) Dos veces en el intervalo [–1, 1].

42. Halla el valor de *p* para que la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + p$ tome con seguridad el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo [1, 2]:

43. ¿Para qué valores del parámetro *a* puede asegurarse que la función $f(x) = x^3 - ax^2 + x + 1$ corta dos veces al eje *OX*, en el intervalo [–1, 1]?

44. ¿Puede aplicarse el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ en el intervalo [0, π]?

45. ¿Puede aplicarse el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ en el intervalo [0, π]? Encuentra, si existe, un punto de [0, π] en el cual se anule esta función.

46. Aplicando el teorema de Bolzano halla un intervalo en el que las siguientes funciones corten al eje de abscisas:
a) $f(x) = -x^3 + 6$ b) $g(x) = x^4 - x - 4$ c) $h(x) = e^{x-2} - 3x$

47. ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de Bolzano, en el intervalo [–1, 1], a las siguientes funciones?
a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ b) $h(x) = \dfrac{1}{\tan x}$ c) $g(x) = \dfrac{x}{1-e^x}$ d) $i(x) = \dfrac{x-1}{1+2\sin x}$

48. Comprueba que la ecuación $x = x\sin x + \cos x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

49. Demuestra que la función $f(x) = e^x + 2\cos x$ corta infinitas veces al eje *OX*. Da dos intervalos distintos en los que pueda asegurarse que la gráfica de *f* corta al eje *OX*.

50. Demuestra que la función $f(x) = e^{-x} - \sin x$ corta al eje *OX* en algún punto del intervalo (π/2, π).

Soluciones:
3. a) 1/5. b) 12. c) 0.
4. a) Si $p \neq 2$ el límite será infinito; si $p = 2$, vale 2.
b) Si $p \neq 4$ el límite valdrá 0; si $p = 4$, vale 3.
5. a) 1/2. b) 8. c) 0.
6. a) 0. b) –3/5. c) ∞.
7. a) 1/2. b) 1/2. c) ∞.
9. a) $e^{1/2}$. b) $e^{1/2}$. c) e^{-4}.
11. a) e^2. b) e^2. c) e^{-4}.
12. $a = 3\ln 2$.
13. a) ∞. b) $\log\frac{5}{2}$. c) –∞. d) 3.
14. a) 0. b) 0. c) ∞.
15. a) ±∞. b) 0. c) π/4. d) no existe.
16. a) No existe: 0; +∞. b) 3. c) 1/3.
17. a) 1. b) No existe: 0; +∞.
18. a) ∞. b) 2/3. c) 3.
19. a) 1. b) 5/2. c) –5/2.
20. $x = 1$; $y = 2x + 3$.
21. $x = 2$; $x = 3$; $y = 0$.
23. $x = 0$; . $y = x + 2$.
24. $x \neq 0$. $x = 0$; $y = -2x$.
25. $p = \pm 1$; $p = \pm 2$.
27. a) $y = 0$. b) $x = 1$; $y = 1$. c) No tiene. d) $y = 0$; $y = 2$.
28. a) $x = 3$. b) $x = 0$. c) $x = -2^-$; $x = 2^+$. d) $x = 1$; $y = 0$.
29. b) $x = -2$. c) $\{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$. e) $x < 2$. h) [0, 2]. j) 0. k) $x \leq 6/5$. m) $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$. n) 1.
30. a) $x = 1$. d) $x = 0$. e) $x = 2$. f) $x \geq 2$.
31. Discontinua en $x = -1$ o $x = 1$. En $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$.
32. Evitable en $x = 1$, $f(1) = \frac{2}{9}$. No evitable en $x = 8$.
33. Si $p > 2$ o $p < -2$, la función tiene dos discontinuidades; si $p = \pm 2$, tiene una discontinuidad. No pueden evitarse.
34. Si $k = 4$, puede evitarse en $x = -2$. Si $k = -4$, puede evitarse en $x = 2$.
35. $a = -1$.
36. $b = -1$; $a = 2$.
37. Continuas siempre.
38. Corta dos veces al eje OX entre –1 y 1.
39. $x = -1{,}25$.
40. $x = 0{,}24$.
41. a) $p > 5$. b) $p > 1$. c) $p > 5$.
42. $2 + \sqrt{2} \leq p \leq 4 + \sqrt{2}$.
43. $a > 3$.
44. No.
45. $x = \pi/2$.
46. a) [0, 2] o [1, 2]. b) [0, 2] o [1, 2]. c) [0, 2] o [2, 5].
47. Ninguna de las funciones es continua en el intervalo [–1, 1].
49. Al menos una vez en cada intervalo $[-(k+1)\pi, -k\pi]$ con k entero positivo.
50. La función se anula en algún entre π/2 y π. Ese será el punto de corte.