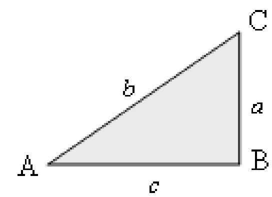
TEMA 8. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolver un triángulo es determinar sus seis elementos (la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus tres ángulos) a partir de sólo tres de ellos, uno de los cuales ha de ser un lado.

Resolver un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus elementos (lados y ángulos) desconocidos.
Para ello nos valemos de las siguientes relaciones:



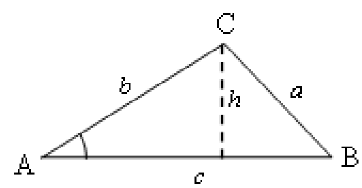
- Teorema de Pitágoras: $b^2 = a^2 + c^2$
- Los ángulos agudos son complementarios: $A + C = 90^o$
- Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, que valen:

$$\sin A = \frac{a}{b} = \cos C; \quad \cos A = \frac{c}{b} = \sin C; \quad \tan A = \frac{a}{c}; \quad \tan C = \frac{c}{a}$$

Las dos primeras fórmulas nos aportan un resultado importante: el seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.

En un triángulo rectángulo se conoce siempre el valor del ángulo recto. El triángulo queda determinado cuando se conoce, además, al menos, dos de sus elementos, uno de los cuales ha de ser un lado.

Área de un triángulo



El área del triángulo de la figura es: $S = \dfrac{c \cdot b \cdot sen\, A}{2}$

O bien: $S = \dfrac{a \cdot c \cdot sen\, B}{2}$ y $S = \dfrac{b \cdot a \cdot sen\, C}{2}$.

- El área de un triángulo es igual al semiproducto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

Fórmula de Herón
Para el mismo triángulo, su área es

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

donde p es el semiperímetro del triángulo, es decir $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Teorema del seno
En un triángulo ABC, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

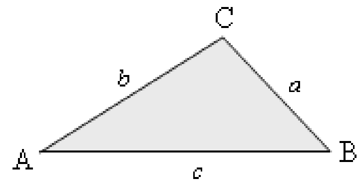
Teorema del coseno
En un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Resolución de un triángulo cualquiera

Para resolver un triángulo cualquiera se utilizan las siguientes relaciones:

1. Los tres ángulos de un triángulo suman 180º.
2. El teorema del seno.
3. El teorema del coseno.



Caso I: Se conocen dos ángulos y un lado.

Por ejemplo, se conocen los ángulos A, B y el lado a.

El ángulo C se encuentra aplicando $A + B + C = 180º$.

Los lados b y c, despejando en: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Caso II: Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Por ejemplo, se conocen los lados b, c y el ángulo A.

El problema tiene siempre solución única.

El lado a se encuentra aplicando $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

El ángulo B, despejando en: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$.

El ángulo C se encuentra aplicando $A + B + C = 180º$.

Caso III: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Por ejemplo, se conocen los lados a, b y el ángulo A.

El problema puede tener dos soluciones, una o ninguna.

Para resolverlo se comienza aplicando el teorema del seno: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

Hay que tener en cuenta que B puede tomar dos valores $\Rightarrow$ El ángulo C también puede tomar dos valores: $C = 180º - A - B \Rightarrow$ los valores de c también pueden ser dos.

Caso IV: Se conocen los tres lados.

El problema, en este caso, tiene solución única siempre que cada uno de los lados sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

La solución se consigue aplicando el teorema del coseno, para despejar cualquier ángulo; después puede aplicarse el teorema del seno.