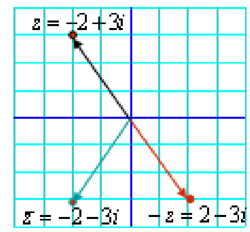
Tema 9. NÚMEROS COMPLEJOS **Resumen**

Número complejo: $z = a + bi$, donde a y b son números reales e i la unidad imaginaria.
Unidad imaginaria: $i = +\sqrt{-1}$. Por tanto, $i^2 = -1$
El conjunto de números complejos se denota por **C.**

Ejemplos: Son números complejos: $z = 3 + 2i$; $z = 4 - i$; $z = -1 + 3i$;
Los de la forma $4 + 0i = 4$ son los reales; Los de la forma $0 + 2i$ se llaman imaginarios puros.

- Dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales cuando son iguales sus partes reales e imaginarias. Es decir $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.
- Dos números complejos son opuestos cuando son opuestas su parte real y su parte imaginaria. El opuesto de $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$
- Dos números complejos son conjugados cuando tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son opuestas. El conjugado de z, se representa por $\bar{z}$. El conjugado de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.



Ejemplos:
a) Si $a + 3i = -2 + ki \Rightarrow a = -2$ y $k = 3$.
b) Si $z = -2 + 3i$ su opuesto es $-z = 2 - 3i$; su conjugado es $\bar{z} = -2 - 3i$.

Operaciones elementales con números complejos en forma binómica

- Suma y diferencia: Dados $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di \rightarrow z_1 \pm z_2 = (a + c) \pm (b + d)i$

Ejemplos:
a) $(2 + 3i) + (3 - i) = (2 + 3) + (3 - 1)i = 5 + 2i$; b) $(4 - 3i) - 2i = 4 - 5i$

- Producto**:** El producto de los números complejos, $(a + bi)$ por $(c + di)$, se realiza como si ambos números fueran binomios, considerando que $i^2 = -1$. Esto es:

$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Observación: (complejo) · (conjugado) = real $\rightarrow (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

Ejemplos:
a) $(2 + 3i) \cdot (1 - 2i) = 2 - 4i + 3i - 6i^2 = 2 - i + 6 = 8 - i$ b) $-3 \cdot (4 + i) = -12 + 3i$
c) $(2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$ d) $2i \cdot (3 - 4i) = 6i - 8i^2 = 8 + 6i$

Cociente: $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} i$

Ejemplo:

$$\frac{1+2i}{3-2i} = \frac{(1+2i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)} = \frac{-1+8i}{9+4} = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13} i$$

Potencias de i: $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -1$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$; … $i^{4n} = 1$.

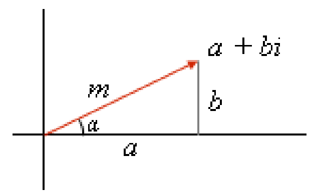
Ejemplos:
a) $i^{25} = i^{24} \cdot i^1 = i$, pues 25 = 4 · 6 + 1; b) $i^{4014} = i^{4012} \cdot i^2 = -1$, pues 4014 = 4 · 1003 + 2.
c) $(4+5i)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5i + (5i)^2 = 16 + 40i - 25 = -9 + 40i$
d) $(5-3i)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3i + (3i)^2 = 25 - 30i - 9 = 16 - 30i$
e) $(2+i)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot i + 6 \cdot 2^2 \cdot i^2 + 4 \cdot 2 \cdot i^3 + i^4 = 16 + 32i + 24i^2 + 8i^3 + i^4 =$
$= 16 + 32i - 24 - 8i + 1 = -7 + 24i$. (Recuérdese el triángulo de Tartaglia.)

Forma polar y forma trigonométrica de un número complejo
Si $z = a + bi$, la expresión $z = m_\alpha$ es la forma polar o módulo-argumental del número complejo.

Módulo → $m = \sqrt{a^2 + b^2}$. Argumento → α, siendo $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

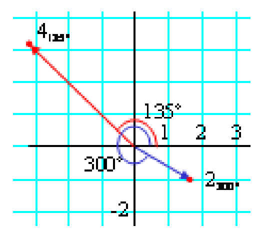
Forma trigonométrica
De $z = a + bi \Leftrightarrow z = m_\alpha \Rightarrow z = m(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
Obsérvese que:

$$\cos\alpha = \frac{a}{m} \Rightarrow a = m \cdot \cos\alpha\,; \quad \sin\alpha = \frac{b}{m} \Rightarrow b = m \cdot \sin\alpha$$



Ejemplos:
a) $z = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ} = 2$ (cos 330º + i sen 330º).

b) $4_{135^\circ} = 4$ (cos 135º + i sen 135º) $= 4\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$



Multiplicación y división de números complejos en forma polar

Multiplicación: $m_\alpha \cdot r_\beta = (m \cdot r)_{\alpha+\beta}$ División: $\dfrac{m_\alpha}{r_\beta} = \left(\dfrac{m}{r}\right)_{\alpha-\beta}$

Ejemplos:
a) $2_{30^\circ} \cdot 3_{45^\circ} = (2 \cdot 3)_{30^\circ + 45^\circ} = 6_{75^\circ}$ b) $5_{240^\circ} \cdot 4_{120^\circ} = 20_{240^\circ + 120^\circ} = 20_{360^\circ} = 20_{0^\circ} = 20$.
c) $8_{60^\circ} : 2_{30^\circ} = \left(\dfrac{8}{2}\right)_{60^\circ - 30^\circ} = 4_{30^\circ}$ d) $\dfrac{4_{30^\circ}}{3_{300^\circ}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)_{30^\circ - 300^\circ} = \left(\dfrac{4}{3}\right)_{-270^\circ} = \left(\dfrac{4}{3}\right)_{90^\circ} = \dfrac{4}{3}i$

Potenciación: $(m_\alpha)^n = (m^n)_{n \cdot \alpha}$

Ejemplos: a) $(2_{30^\circ})^5 = (2^5)_{5 \cdot 30^\circ} = 32_{150^\circ}$ b) $(1 - \sqrt{3}i)^6 = (2_{300^\circ})^6 = (2^6)_{6 \cdot 300^\circ} = 64_{1800^\circ} = 64$

Radicación de números complejos
$\sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{m_{\alpha + k \cdot 360^\circ}} = \left(\sqrt[n]{m}\right)_{\frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}}$, k = 0, 1,..., n − 1 → hay n raíces diferentes.

Ejemplos:
a) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}} \rightarrow 2_{45^\circ},\ 2_{135^\circ},\ 2_{225^\circ},\ 2_{315^\circ}$

b) $\sqrt[3]{2 + 2i} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)_{45^\circ}} = \left(\sqrt[6]{8}\right)_{\frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{45^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}} \rightarrow \left(\sqrt{2}\right)_{15^\circ}; \left(\sqrt{2}\right)_{135^\circ}$ y $\left(\sqrt{2}\right)_{255^\circ}$