

Tema 3. NÚMEROS REALES

Conjuntos numéricos:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}; \quad \mathbf{Z} = \{\dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}; \quad \mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}, \quad \text{con } \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

$$\text{Reales} \begin{cases} \text{Racionales} \begin{cases} \text{Enteros} \begin{cases} \text{Naturales} \\ \text{Negativos} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales} \end{cases}$$

Operaciones con números reales

Reglas de los signos. Propiedad distributiva. Factor común

Propiedades del orden

Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$; $a \cdot c < b \cdot c$ cuando $c > 0$; $a \cdot c > b \cdot c$ cuando $c < 0$

Intervalos. Los intervalos son subconjuntos de la recta real.

- abierto $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- Intervalos infinitos: $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$; $(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$; $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$.

Valor absoluto: $|a| = a$ si $a > 0$. $|a| = -a$ si $a < 0$.

Intervalos mediante valor absoluto.

- $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \Leftrightarrow x \in (-k, k)$. $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \Leftrightarrow x \in [-k, k]$.
- $|x - a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x - a \leq k \Leftrightarrow x \in [a - k, a + k]$.

Propiedades de las potencias. Repasar las dadas en el Tema 2

Radicales: $\sqrt[n]{a} = b, a > 0 \Leftrightarrow b^n = a$ $\sqrt[n]{a} = b, n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow b^n = a$ $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Propiedades y operaciones con radicales

- Producto de radicales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab} \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{1/n+1/m}$$

- Potencia y raíz de un radical: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

- Cociente de radicales: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{a^{1/n}}{a^{1/m}} = a^{1/n-1/m}$

- La suma y resta de radicales sólo puede “hacerse” cuando son radicales semejantes. Alguna vez los radicales pueden hacerse semejante, extrayendo o introduciendo factores en la raíz.

Introducción: $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Para introducir un factor se eleva al índice de la raíz.

Extracción: $\sqrt[n]{Ab} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$, supuesto que $\sqrt[n]{A} = a$.

- Racionalización de denominadores

Los casos usuales son: $\frac{a}{\sqrt{b}}$; $\frac{a}{b + \sqrt{c}}$; $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$

Se racionalizan multiplicando los dos términos de las fracciones por \sqrt{b} , por $b - \sqrt{c}$ y por $\sqrt{b} - \sqrt{c}$, respectivamente.