TEMA 4. Ecuaciones e inecuaciones

Ecuaciones

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones. Para ello, se ha de transformar la ecuación dada en otra equivalente a ella cuyas soluciones se obtengan de forma simple.
Las transformaciones a que habitualmente es sometida una ecuación se basan en las reglas:
1. Si se suman a los dos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica, las soluciones de la ecuación no varían.
2. Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un número distinto de 0, la ecuación resultante es equivalente a la dada.
3. Si $A(x)\cdot B(x)=0 \Rightarrow A(x)=0$ o $B(x)=0$.

Ecuaciones de primer grado: son de la forma $ax+b=0$. También se llaman lineales.

Se resuelve así: $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$

Aplicaciones: Resolución de problemas de edades, de proporciones y de mezclas.

Ecuaciones de segundo grado: su forma más simple es: $ax^2+bx+c=0$.

Sus soluciones son: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Pueden tener dos, una o ninguna solución.

Casos particulares: $ax^2+c=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$. No siempre tiene solución.

$ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=-\dfrac{b}{a}$.

Interpretación geométrica de las soluciones: la función $y=ax^2+bx+c$ es una parábola; los puntos de corte de dicha parábola con el eje de abscisas son las soluciones de $x^2+bx+c=0$.

Ecuaciones irracionales: contienen al menos un término en el que la incógnita está bajo el signo radical. Se resuelven aislando la raíz. Suelen dar lugar a una ecuación de segundo grado. Hay que comprobar las soluciones halladas.

Ecuaciones bicuadradas: Son ecuaciones de grado cuatro, de la forma $ax^4+bx^2+c=0$
Haciendo $x^2=t$ queda $at^2+bt+c=0$

Ecuaciones de grado superior a dos: son del tipo $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$, $n\geq 3$.
Para resolverlas hay que descomponer el polinomio asociado en factores, si se puede. Debe recordarse que si la ecuación tiene soluciones enteras serán divisores del término independiente.

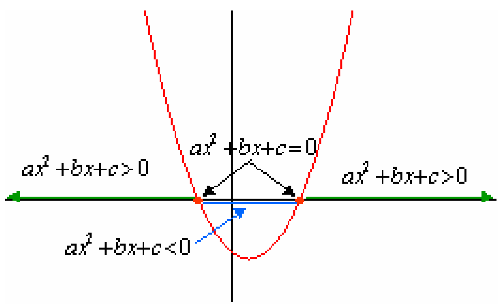
Ecuaciones racionales. Son de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=k$. Se resuelven eliminando denominadores y pasando a una ecuación que responda a alguno de los tipos estudiados con anterioridad. Hay que comprobar que las soluciones obtenidas son válidas.

Inecuaciones
Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Los valores de las incógnitas que cumplen la desigualdad son las soluciones. En general, una inecuación admite infinitas soluciones. Para resolver una inecuación hay que tener en cuenta las propiedades del orden.
Si $a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$; $a{\cdot}c \le b{\cdot}c$ si $c > 0$; $a{\cdot}c \ge b{\cdot}c$ cuando $c < 0$.

Inecuaciones lineales con una incógnita. Son de la forma $ax + b \ge 0$.
Solución: $ax + b \ge 0 \Rightarrow ax \ge -b \Rightarrow x \ge -b/a$, si $a > 0$; $x \le -b/a$, si $a < 0$.

Inecuaciones de segundo grado. Son de la forma $ax^2 + bx + c \ge 0$
Su resolución está ligada a la solución de su ecuación asociada, $ax^2 + bx + c = 0$, pues si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación, entonces $ax^2 + bx + c \ge 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) \ge 0$.
Estudiando los signos de cada factor se determinan los intervalos solución.
Es útil representar las soluciones x_1 y x_2 en la recta real y estudiar el signo de $a(x - x_1)(x - x_2)$ en los intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) y $(x_2, +\infty)$.

Resolución gráfica. La solución de $ax^2 + bx + c \ge 0$ se corresponde con el intervalo en el que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta o está por encima del eje OX. Véase la figura.



Inecuaciones racionales. En ellas la incógnita aparece en un denominador. Para resolverla hay que expresarla en la forma $0 \le \dfrac{A(x)}{B(x)}$ (sin más términos).
Las soluciones se obtienen analizando los signos $A(x)$ y $B(x)$ para determinar el signo del cociente. Una buena estrategia consiste en señalar sobre una recta las soluciones de $A(x) = 0$ y de $B(x) = 0$, e ir estudiando el signo del cociente en los sucesivos intervalos que se presente.

Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Una inecuación lineal con dos incógnitas x e y es una expresión de la forma $ax + by < c$. El signo $<$ puede sustituirse por $>$, $\le$ o $\ge$; a, b y c representan números.
El conjunto de valores solución de estas inecuaciones son las coordenadas de los puntos que están en uno de los semiplanos en los que divide la recta $ax + by = c$ al plano. Es decir, el conjunto solución es una porción del plano y debemos encontrarla de forma gráfica: no tenemos más remedio que dibujar. Los signos de los coeficientes a y b son los que determinan qué semiplano es. En el caso de inecuaciones con $\le$ o $\ge$, en el conjunto de soluciones también se incluyen los puntos de la recta. (Véase figura.)