

Tema 7. FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

Aplicaciones. Interpolación y funciones de oferta y demanda

Resumen

Funciones polinómicas. La expresión general de una función polinómica es

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Es la misma que la de un polinomio. Los números a_i son los coeficientes y n indica el grado, que debe ser un número entero positivo. La indeterminada x es la variable independiente. Su dominio es \mathbf{R} ; esto es, siempre están definidas. El valor de $f(x)$ dependerá del que tome x .

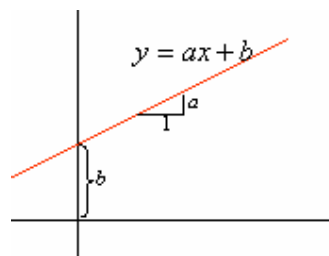
- La función polinómica de grado cero, $f(x) = a_0$ o $y = k$, es la función constante. Se representa mediante una recta horizontal.
- La función lineal es la de grado uno. Su expresión es:

$$f(x) = ax + b \Leftrightarrow y = ax + b$$

Su representación gráfica es una recta. Para trazarla basta con conocer dos de sus puntos.

El coeficiente a se llama pendiente, y mide lo que varía la y por cada aumento unitario de x .

Al número b se le llama ordenada en el origen, pues indica el valor de y cuando x vale 0.



Recta que pasa por dos puntos

Una recta queda determinada por dos puntos. Si los puntos son $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, al ser de la recta $y = ax + b$, deberán cumplir su ecuación. Luego:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

La solución de este sistema nos proporciona los valores de a y b .

Rectas que pasan por el origen. Su expresión general es: $y = ax$.

Estas funciones se llaman de proporcionalidad directa: el coeficiente a indica la razón de proporcionalidad entre las variables x e y .

Si $a = 1$, la función se llama identidad: $y = x$.

Rectas horizontales y verticales

- La expresión general de una recta horizontal es $y = b$. Recibe el nombre de función constante.
- La ecuación de una recta vertical es de la forma $x = k$.

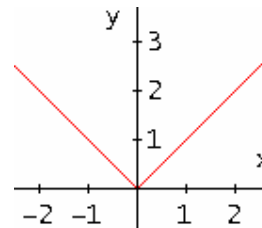
Esta expresión no define una función: al valor $x = k$ le corresponden infinitos valores de y .

- La ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es la ecuación general de una recta, en su forma implícita.

- La función valor absoluto de x se escribe así:

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- La parte entera de x , que escribimos $f(x) = ENT[x]$, es la función que asigna a cada número real x el número entero menor o igual que x . Es una función escalonada.



La función cuadrática: parábolas.

Su expresión analítica es: $f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$

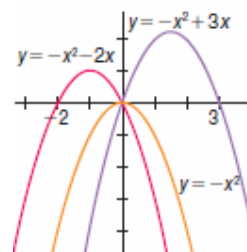
La gráfica de esta función es una parábola de eje vertical.

Efecto de los parámetros a , b y c

La parábola $y = ax^2 + bx + c$ queda totalmente definida cuando se conocen a , b y c .

Coefficiente a :

- Si $a > 0$ la parábola es cóncava (\cup). Su vértice está en el mínimo de la función.
- Si $a < 0$, es convexa (\cap). El vértice es el máximo.
- La abscisa del vértice es $x = -\frac{b}{2a}$; su ordenada, el valor de y correspondiente.



Coefficiente b . El coeficiente b produce un desplazamiento lateral en la parábola.

Término independiente c . El término c produce desplazamientos verticales en la parábola.

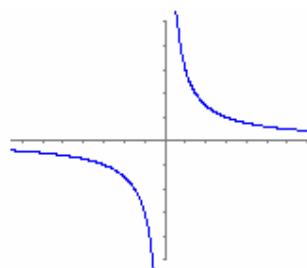
Funciones racionales. Son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

- Su dominio de definición son todos los números reales, salvo aquellos que anulan el denominador. Luego no están definidas en los números que son solución de $Q(x) = 0$. Tienen asíntotas: verticales, en las raíces del denominador que no lo sean (a la vez) del numerador; horizontales, si el grado de $Q(x)$ es mayor que el de $P(x)$; y oblicuas, cuando el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el de $Q(x)$.

Función de proporcionalidad inversa. Su expresión general es $f(x) = \frac{k}{x}$ o $y = \frac{k}{x}$,

donde k es una constante distinta de cero.

Cuando decimos que dos magnitudes x y y son inversamente proporcionales, queremos indicar que en la misma proporción que aumenta el y , disminuye x , y viceversa. Así, si x se hace el doble, y se convierte en la mitad; por eso, su producto es constante, $yx = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.



Observa que $y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow yx = k$.

La regla de tres simple inversa se ajusta a esta relación.

La representación gráfica de esta función es una hipérbola equilátera. Los ejes de coordenadas son asíntotas de esta curva.

Funciones radicales. Son de la forma $y = \sqrt[n]{f(x)}$, siendo $f(x)$ cualquier otra función.

- Dominio: Estas funciones están definidas cuando está definida $f(x)$ y además puede hacerse la raíz. Así, si n es par (caso de raíces cuadradas: $y = \sqrt{f(x)}$), será necesario que $f(x) \geq 0$; si n es impar, basta con que $f(x)$ esté definida.

Función de interpolación. Interpolación lineal y cuadrática

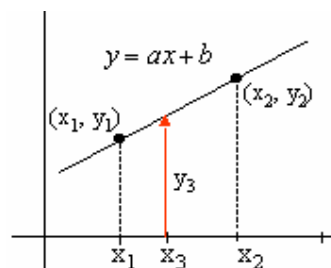
Se llama función de interpolación a la función que se ajusta a una serie de puntos dados.

Interpolación lineal. Cuando se conocen sólo dos puntos, el polinomio interpolador es la función $f(x) = ax + b$, que es una recta. Para determinarla hay que hallar a y b .

Si los puntos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, los valores de a y b se hallan

resolviendo el sistema:
$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

El valor de interpolación correspondiente a x_3 se calcula sustituyendo en ecuación hallada, siendo $y_3 = ax_3 + b$.

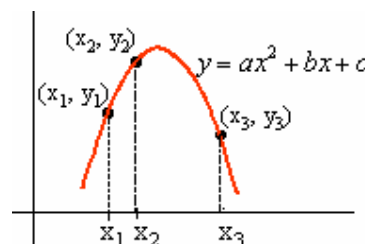


Interpolación cuadrática

Cuando se conocen tres pares de puntos no alineados, el polinomio interpolador es la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, que es una parábola.

Si los puntos son $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$, los valores de a , b y c se hallan resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$



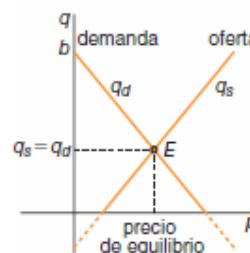
Una aplicación a la economía: Funciones de oferta y demanda

- La función de demanda, q_d , para un producto es aquella que determina la cantidad total que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio p
- La función de oferta, q_s , es la que determina la cantidad total que los fabricantes están dispuestos a producir a un precio de venta p .
- Cantidad de equilibrio es el número de unidades que hay que producir para que la demanda y la oferta se igualen: que se venda todo lo producido. Esto es, cuando $q_d = q_s$. El valor de p correspondiente se llama precio de equilibrio.

Modelos de oferta y demanda. Modelo lineal

- La demanda viene dada por la recta $q_d = b - ap$, con a y $b > 0$; (la pendiente negativa indica que cuando el precio p aumenta las ventas disminuyen).
- La oferta se expresa por $q_s = c + dp$, con $d > 0$, para indicar que si el precio aumenta la producción también lo hace. El término c suele ser negativo.

En los dos casos la variable independiente es p , y su dominio está definido para valores de $p > 0$ que hagan a q_s y q_d positivas y enteras (en la práctica no pueden venderse trozos de un producto).



Modelo cuadrático. La demanda se ajusta a la función $q_d = -ap^2 + bp + c$, con $a > 0$.

La oferta puede ajustarse por otra función cuadrática, $q_s = a'p^2 + b'p + c'$ con $a' > 0$.

La primera parábola tiene el vértice en el máximo; la segunda, en el mínimo.

Como en el modelo lineal, p , q_s y q_d deben ser positivos.

- También pueden darse modelos mixtos: con la función de oferta lineal y la de demanda cuadrática; o viceversa.