Tema 8. FUNCIONES EXPONECIALES Y LOGARÍTMICAS Resumen

La función exponencial es de la forma $f(x) = a^x \iff y = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$.

- Caso particular: La exponencial de base *e*: $f(x) = e^x$.

Observación: Para trabajar correctamente con las funciones exponenciales y logarítmicas necesitas manejar bien las propiedades de la potenciación.

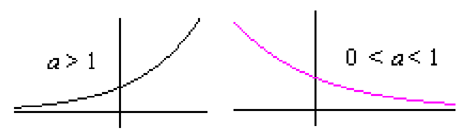
Algunas de ellas son: $a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $-a^n$ no es igual a $(-a)^n$

Ejemplo: $f(x) = 2^x$ es la exponencial de base 2. Algunos valores son:

$f(1) = 2^1 = 2$; $f(5) = 2^5 = 32$; $f(-3) = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; $f(2{,}3) = 2^{2{,}3} = 4{,}924577653$

Características fundamentales de la función exponencial $f(x) = a^x$

- Dominio: Dom(*f*) = **R**.
- Su valor siempre es positivo: $f(x) = a^x > 0$, para todo *x*.
- Corta al eje *OY* en el punto *y* = 1, pues $f(0) = a^0 = 1$.
- Crecimiento y decrecimiento:



Si la base *a* > 1, la función siempre es creciente.
Si la base 0 < *a* < 1, la función es decreciente.

- El eje *OX*, la recta *y* = 0, es una asíntota horizontal.

Nota: La función general $f(x) = ka^{g(x)}$ está definida siempre que lo esté *g*(*x*).

Logaritmos. Definición: $\log_a x = b \iff a^b = x$, con $a \neq 1$.

Las bases usuales son *a* =10 y *a* = *e*. En la calculadora, teclas $\boxed{\text{log}}$ y $\boxed{\text{ln}}$

- El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido.

Propiedades de los logaritmos

$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$ $\quad \log_a A^n = n\log_a A$ $\quad \log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

$\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$ $\quad \log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$

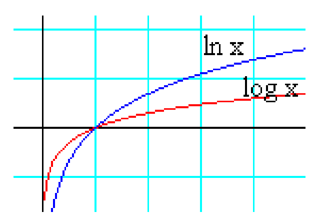
Ejemplo: a) log 5 + log 20 = log (5 · 20) = log 100 = 2.

b) $\log 5^7 = 7 \cdot \log 5$; $\log 3^x = x \cdot \log 3$. c) $\log \dfrac{1}{20} = \log 1 - \log 20 = -\log 20$.

La función logarítmica

La más sencilla es $f(x) = \log_a x \iff y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$).

Para las bases usuales, *a* = 10 y *a* = *e*: $f(x) = \log x$ y $f(x) = \ln x$.



Propiedades fundamentales:

- Dominio: $\mathbf{R}^+ \to x > 0$. Recorrido: $(-\infty, +\infty)$.
- El eje *OY*, la recta *x* = 0, es asíntota vertical de su curva.

Si *a* > 1 (que es lo usual), la función es creciente.
Si 0 < *a* < 1, la función será decreciente.

Nota: La función general $f(x) = \log_a g(x)$ está definida siempre que *g*(*x*) > 0.

Ejemplo: $y = \log(x-5)$ está definida para *x* > 5; e $y = \log(1+x^2)$ está definida siempre.

- Las funciones exponencial y logarítmica son inversas; esto es: $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Casos inmediatos:

- Ecuación $a^x = b$, $a > 0$ y $b > 0$. Se resuelven aplicando logaritmos.

Ejemplo:

$$2^x = 15 \Rightarrow \log 2^x = \log 15 \Rightarrow x \log 2 = \log 15 \Rightarrow x = \frac{\log 15}{\log 2} = \frac{1{,}176...}{0{,}301...} = 3{,}90689...$$

- Ecuación $a^b = x$. (Si a es negativo puede que esta expresión no tenga sentido)

Es un ejercicio común de potenciación. Puede resolverse con la calculadora.

Ejemplo: $4^{3,2} = x$. Con la calculadora se obtiene $x = 84{,}4885$.

- Ecuación $x^a = b$, $b > 0$. Puede resolverse aplicando logaritmos (antilogaritmos).

Ejemplo:

$x^4 = 15 \rightarrow$ Aplicando logaritmos: $x^4 = 15 \Rightarrow \log x^4 = \log 15 \Rightarrow 4 \log x = \log 15 \Rightarrow$

$$\log x = \frac{\log 15}{4} = \frac{1{,}176091259}{4} = 0{,}294022814 \Rightarrow x = \text{antilog } 0{,}29022814 = 1{,}967989671$$

Para calcular antilogaritmo, pulsar: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\log}$ 0,29022814

- Ecuación $\log_a x = b$ Se resuelve empleando la definición de logaritmo y la potenciación.

Ejemplo: $\log x = 3{,}5 \Rightarrow x = 10^{3,5} \Rightarrow x = 3162{,}27766$.

- Ecuación $\log_a b = x$. Puede resolverse aplicando logaritmos o la fórmula del cambio de base: $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$. Si las bases son 10 o e se resuelven directamente con la calculadora; en cualquier otro caso hay que aplicar la definición de logaritmo.

Ejemplo:

$$\log_4 50 = x \Rightarrow 4^x = 50 \Rightarrow \log 4^x = \log 50 \Rightarrow x \log 4 = \log 50 \Rightarrow x = \frac{\log 50}{\log 4} = 2{,}82$$

- Ecuación $\log_x a = b$. Se resuelve aplicando la definición de logaritmo.

Ejemplo: $\log_x 1000 = 5 \Rightarrow x^5 = 1000 \Rightarrow x = 1000^{1/5} = 3{,}98107$.

Otras ecuaciones logarítmicas y exponenciales

En algunos casos se resuelven aplicando las propiedades de los logaritmos, haciendo un cambio del tipo $a^x = t$, sacando factor común o aplicando alguna otra propiedad algebraica.

Ejemplos:

a) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} = 9 \Rightarrow 3^{x-1} \cdot (3-2) = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 9 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$.

b) $\log(x+4) + \log(x-1) = \log(x^2+5) \Rightarrow \log[(x+4)\cdot(x-1)] = \log(x^2+5) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+4)\cdot(x-1) = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = x^2 + 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$.