

**Tema 9. SUCESIONES Y PROGRESIONES****Resumen**

Una sucesión es un conjunto de números dispuestos ordenadamente. A cada uno de los números se le llama término. Suelen designarse por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

**Ejemplos:**

a) 4, 7, 10, 13, ...  $\rightarrow a_1 = 4, \dots, a_4 = 13$ .

b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... es la sucesión de los números primos.

Término general de una sucesión

Es una fórmula que nos permite obtener el valor de cualquier término en función de la posición que ocupa.

**Ejemplo:** La expresión  $a_n = 3n + 1$  es el término general de la sucesión 4, 7, 10, 13, .... A partir de esa fórmula podemos obtener, por ejemplo,  $a_{25} = 3 \cdot 25 - 1 = 74$ .

Una sucesión es creciente si cada término es mayor o igual que el anterior:  $a_n \leq a_{n+1}$ . Esto es, cuando  $a_{n+1} - a_n \geq 0$ . **Ejemplo:** La sucesión 1; 1,2; 1,3; 1,4; ... es (estrictamente) creciente.

Una sucesión es decreciente si cada término es menor que el anterior:  $a_n \geq a_{n+1}$ . Esto es, cuando  $a_{n+1} - a_n \leq 0$ . **Ejemplo:** La sucesión 1; 1/2; 1/3; 1/4, ... es estrictamente decreciente

- Una sucesión es constante si tiene todos sus términos iguales:  $a_n = k$ , para todo  $n$ .
- Una sucesión está acotada superiormente si existe una constante  $k$ , tal que  $a_n \leq k$ , para todo  $n$ . Una sucesión está acotada inferiormente si existe una constante  $k$ , tal que  $k \leq a_n$ , para todo  $n$ .

**Ejemplo:** La sucesión  $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$  es creciente y está acotada superiormente por  $k = 2$ .

Introducción al concepto de límite de una sucesión

La sucesión  $a_n$  tiende a  $a$ ,  $a_n \rightarrow a$  o  $\lim(a_n) = a$ , si para valores grandes de  $n$  la diferencia  $|a_n - a| \rightarrow 0$ . A las sucesiones que tienen límite se las llama convergentes.

Límite de algunas sucesiones

- Las sucesiones de tipo polinómico:  $a_n = P(n) \rightarrow \pm\infty$ . **Ejemplo:**  $\lim(-n^2 + 17n + 1) = -\infty$

- $a_n = 1/P(n) \rightarrow 0$ . **Ejemplo:**  $\lim \frac{1}{n^2 - 2n - 1} = 0$

- $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \rightarrow 0$ , si el grado  $Q(n) >$  grado  $P(n)$ . **Ejemplo:**  $\lim \frac{3n+10}{n^2+1} = 0$

- $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \rightarrow \infty$ , si el grado  $Q(n) <$  grado  $P(n)$ . **Ejemplo:**  $\lim \frac{n^2 - 3n}{10n + 25} = \infty$

- $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)} \rightarrow \frac{p}{q}$ , si grado  $Q(n) =$  grado  $P(n)$ . siendo  $p$  y  $q$  los coeficientes principales de

$P(n)$  y  $Q(n)$ , respectivamente. **Ejemplo:**  $\lim \frac{3n^2 + 7n - 17}{2n^2 - 16n + 39} = \frac{3}{2}$

Progresiones aritméticas

Una sucesión es una progresión aritmética cuando cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo, llamado diferencia de la progresión.

En general, si el primer término es  $a_1$  y la diferencia  $d$ , la progresión aritmética es:

$$a_1 \quad a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_2 + d \quad a_4 = a_3 + d \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} + d$$

- El término general de una progresión aritmética es:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

**Ejemplo:** La sucesión 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, ... es una p. a. de diferencia  $d = 0,5$ .

Término general:  $a_n = 1,5 + (n-1) \cdot 0,5 \Leftrightarrow a_n = 1 + 0,5n \Rightarrow a_{35} = 1 + 0,5 \cdot 35 = 18,5$ ;  $a_{100} = 51$ .

- La suma de los  $n$  primeros términos de una progresión aritmética es:  $S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

**Ejemplo:** La suma:  $1 + 7 + 13 + 19 + \dots + a_{200}$ , vale,  $S = \frac{(a_1 + a_{200}) \cdot 200}{2}$ .

Como  $a_1 = 1$  y  $d = 6 \Rightarrow a_{200} = 1 + 199 \cdot 6 = 1195$ , entonces:  $S = \frac{(1 + 1195) \cdot 200}{2} = 119600$ .

Progresiones geométricas

Una sucesión es una progresión geométrica cuando cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, llamado razón de la progresión.

Si el primer término de una progresión geométrica es  $a_1$  y la razón es  $r$ , la progresión será:

$$a_1 \quad a_2 = a_1 r \quad a_3 = a_2 r \quad a_4 = a_3 r \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} r$$

- El término general de la progresión geométrica es:  $a_n = a_1 r^{n-1}$

**Ejemplo:** La sucesión 1, 2, 4, 16, 32, ... es una progresión geométrica de razón  $r = 2$ .

Su término general será:  $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 2^9 = 512$ .

- La suma de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica es:  $S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

- Si la razón,  $r$ , verifica que  $|r| < 1$ , dicha suma vale:  $S = \frac{a_1(-1)}{r - 1} = \frac{a_1}{1 - r}$

**Ejemplo:**

a) La suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 2, 4, 8, ... es

$$S = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023.$$

b) La suma  $100 + 50 + 25 + 12,5 + \dots$  (infinitos términos, con  $r = 1/2$ ) es:  $S = \frac{100}{1 - 1/2} = 200$ .