

Tema 10. FUNCIONES TRIGONÓMICAS

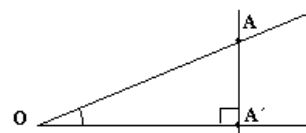
Resumen

Razones trigonométricas de un ángulo

Dado un ángulo cualquiera, O, se define:

$$\text{sen } \hat{O} = \frac{AA'}{OA} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}; \quad \text{cos } \hat{O} = \frac{OA'}{OA} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}};$$

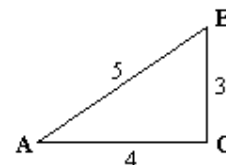
$$\text{tag } \hat{O} = \frac{AA'}{OA'} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$



- El ángulo O puede medirse en grados o en radianes. (Un radian es un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que ha sido trazado). La relación entre ambas unidades es $360^\circ = 2\pi$ radianes \rightarrow La circunferencia completa abarca 2π radianes. Las calculadoras disponen de las teclas DEG y RAD, para grados y radianes, respectivamente.

Ejemplos: Para el triángulo adjunto se tiene:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \text{cos } \hat{A} = \frac{4}{5} = 0,8; \quad \text{tag } \hat{A} = \frac{3}{4} = 0,75$$



Otras razones trigonométricas:

Cosecante: $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$. Secante: $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$. Cotangente: $\text{cotag } \alpha = \frac{1}{\text{tag } \alpha}$

Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas de un ángulo

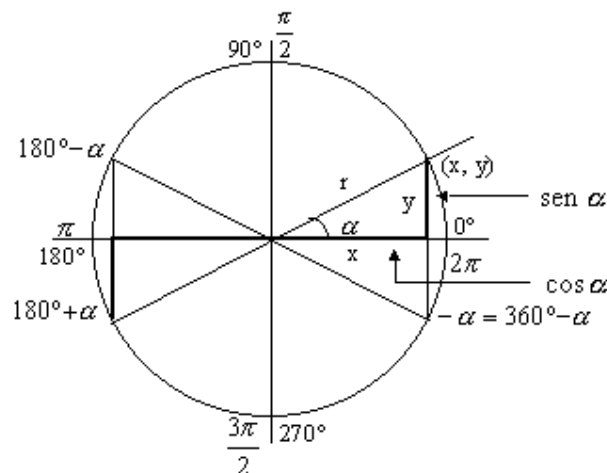
$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1; \quad \text{tag } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}; \quad 1 + \text{tag}^2 \alpha = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha}$$

Razones trigonométricas en la circunferencia

Con ayuda de la circunferencia:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \rightarrow \text{si } r = 1, \text{ sen } \alpha = y;$$

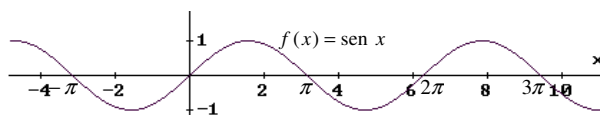
$$\text{cos } \alpha = \frac{x}{r} \rightarrow \text{si } r = 1, \text{ cos } \alpha = x$$



Como $x < r$ e $y < r$, para cualquier ángulo α se verifica:

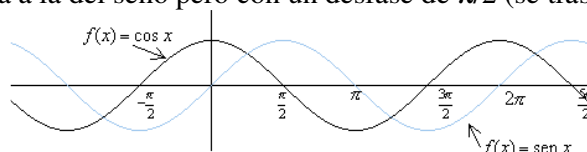
$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$$

La función seno: $f(x) = \text{sen } x$



- Es periódica de periodo $p = 2\pi$. Esto es: $\text{sen } x = \text{sen}(x + 2\pi)$, para cualquier valor de x .
- Está definida siempre: $\text{Dom} = \mathbf{R}$.
- Su recorrido es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es una función impar, pues $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)$. Por tanto, es simétrica respecto del origen.

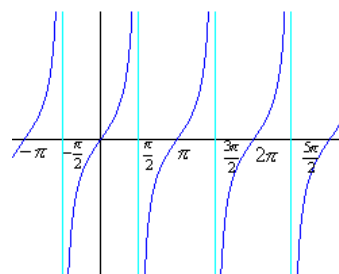
La función coseno: Puede definir a partir del seno así: $f(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, su gráfica será idéntica a la del seno pero con un desfase de $\pi/2$ (se traslada $\pi/2$ a la izda).



- Es periódica de periodo $p = 2\pi$. Esto es: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$, para cualquier valor de x .
- Dom = \mathbf{R} . Recorrido: $[-1, 1]$.
- Es una función par, pues $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$. Por tanto, es simétrica respecto del eje OX.

La función tangente ($f(x) = \text{tag } x$): $f(x) = \text{tag } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$

- Es periódica de periodo $p = \pi$: $\text{tag } x = \text{tag}(x + \pi)$.
- Está definida siempre que $\cos x \neq 0$: esto es, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Tiene por asíntotas verticales las rectas: $x = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$.



Ecuaciones trigonométricas. La incógnita aparece ligada a una razón trigonométrica.

• **Ecuación $a \cdot \text{sen}(bx) = c$** $\rightarrow \text{sen}(bx) = c/a \Rightarrow bx = \arcsen(c/a) \Rightarrow x = [\arcsen(c/a)]/b$

Ejemplo: $2 \text{sen } 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \arcsen(1/2) \Rightarrow x = \frac{1}{3} \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ \cdot n \\ 150^\circ + 360^\circ \cdot n \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 10^\circ + 120^\circ \cdot n \\ 50^\circ + 120^\circ \cdot n \end{cases}$

• **Ecuación $a \cdot \text{cos}(bx) = c$** $\rightarrow \text{cos}(bx) = c/a \Rightarrow bx = \arccos(c/a) \Rightarrow x = [\arccos(c/a)]/b$

Ejemplo: $\sqrt{2} \text{cos } x = 1 \Rightarrow x = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \begin{cases} 45^\circ + 360^\circ \cdot n \\ 315^\circ + 360^\circ \cdot n \end{cases}$

• **Ecuación $a \cdot \text{tag}(bx) = c$** $\rightarrow \text{tag}(bx) = c/a \Rightarrow bx = \text{arctag}(c/a) \Rightarrow x = [\text{arctag}(c/a)]/b$.

Ejemplo: $\tan x = 2 \Rightarrow x = \text{arctan } 2 \Rightarrow x = 63,43^\circ + n \cdot 180^\circ$

Los valores de arcsen, arccos y arctag se hallan con la calculadora: $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$.

Resolución de triángulos rectángulos

<p>□ Sabiendo que $A = 40^\circ$ y $b = 10$ cm, halla a, c y B.</p> <p>• $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$</p> <p>• $\cos 40 = \frac{10}{c} \Rightarrow c = \frac{10}{\cos 40} = \frac{10}{0,766} = 13,05$</p> <p>• $\text{tag } 40 = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 10 \text{ tag } 40^\circ = 10 \cdot 0,839 = 8,39$ cm.</p>	<p>□ Sabiendo que $A = 20^\circ$ y $c = 15$ cm, halla a, b y B.</p> <p>• $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$</p> <p>• $\cos 20 = \frac{b}{15} \Rightarrow b = 15 \cos 20^\circ = 15 \cdot 0,94 = 14,1$ cm</p> <p>• $\text{sen } 20 = \frac{a}{15} \Rightarrow a = 15 \text{ sen } 20^\circ = 15 \cdot 0,342 = 5,13$ cm.</p>	<p>□ Sabiendo que $a = 8$ cm y $c = 12$ cm, halla b, A y B.</p> <p>$b = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{80} = 8,94$</p> <p>• $\text{sen } A = \frac{8}{12} = 0,666... \Rightarrow A = \arcsen 0,666 = 41,81^\circ$</p> <p>• $B = 90^\circ - 41,81^\circ = 48,19^\circ$</p>
---	--	--

