

Tema 2. INTRODUCCIÓN AL NÚMERO REAL

Conjuntos numéricos:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}; \quad \mathbf{Z} = \{\dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}; \quad \mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0 \right\}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}, \quad \text{con } \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$$

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

$$\text{Reales} \begin{cases} \text{Racionales} \begin{cases} \text{Enteros} \begin{cases} \text{Naturales} \\ \text{Negativos} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales} \end{cases}$$

Propiedades del orden

$$\text{Si } a < b \Rightarrow a + c < b + c; \quad a \cdot c < b \cdot c \text{ cuando } c > 0; \quad a \cdot c > b \cdot c \text{ cuando } c < 0$$

Intervalos. Los intervalos son subconjuntos de la recta real.

$$\bullet \text{abierto } (a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\} \quad \text{cerrado } [a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

$$\text{Intervalos infinitos: } (-\infty, +\infty) = \mathbf{R}; \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}; \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}.$$

$$\text{Valor absoluto:} \quad |a| = a \text{ si } a > 0. \quad |a| = -a \text{ si } a < 0.$$

Intervalos mediante valor absoluto.

$$\bullet |x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \Leftrightarrow x \in (-k, k). \quad |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \Leftrightarrow x \in [-k, k].$$

$$\bullet |x - a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x - a \leq k \Leftrightarrow x \in [a - k, a + k].$$

Propiedades de las potencias

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{Radicales:} \quad \sqrt[n]{a} = b, \quad a > 0 \Leftrightarrow b^n = a \quad \sqrt[n]{a} = b, \quad n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow b^n = a \quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

Propiedades y operaciones con radicales

- Producto de radicales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab} \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{1/n+1/m}$$

$$\bullet \text{Potencia y raíz de un radical: } (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\bullet \text{Cociente de radicales: } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{a^{1/n}}{a^{1/m}} = a^{1/n-1/m}$$

- La suma y resta de radicales sólo puede “hacerse” cuando son radicales semejantes. Alguna vez los radicales pueden hacerse semejante, extrayendo o introduciendo factores en la raíz.

Introducción: $\boxed{a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$. Para introducir un factor se eleva al índice de la raíz.

Extracción: $\boxed{\sqrt[n]{Ab} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}}$, supuesto que $\sqrt[n]{A} = a$.

- Racionalización de denominadores

$$\text{Los casos usuales son: } \frac{a}{\sqrt{b}}; \quad \frac{a}{b + \sqrt{c}}; \quad \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Se racionalizan multiplicando los dos términos de las fracciones por \sqrt{b} , por $b - \sqrt{c}$ y por $\sqrt{b} - \sqrt{c}$, respectivamente.