

Polinomios y fracciones algebraicas (Pendientes de Matemáticas I)

Tipo I: Operaciones con polinomios

1. Calcula: a) $(8x^4 - 9x^3 + 1) - (2x + 3x^3 - 5x^4)$ b) $\left(2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3\right) - \left(\frac{3}{4}x^2 + 5x - \frac{1}{3}\right)$

[sol] a) $13x^4 - 12x^3 - 2x + 1$; b) $2x^3 - \frac{5}{4}x^2 - 5x + \frac{10}{3}$

2. Halla: a) $(x-6)^2$; b) $(4+x^2)^2$; c) $(2x-1)^2$; d) $(4x-1)(4x+1)$

[sol] a) $x^2 - 12x + 36$; b) $16 + 8x^2 + x^4$; c) $4x^2 - 4x + 1$; d) $16x^2 - 1$

3. Haz las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $(5x^2 + 3x - 5)(7x^3 - 6x + 3)$; b) $\left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right)(x^2 - 5x - 14)$

[sol] a) $35x^5 + 21x^4 - 65x^3 - 3x^2 + 39x - 15$; b) $x^4 - \frac{21}{4}x^3 - \frac{105}{8}x^2 + \frac{43}{8}x + \frac{21}{4}$;

4. Divide: a) $(5x^4 - 14 + 5x + x^3) : (3 - x^2)$ b) $(2x^3 - 3x + 2) : (2x - 1)$

[sol] a) $C(x) = -5x^2 - x - 15$; $R(x) = 8x + 31$; b) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$; $\frac{3}{4}$

Tipo II: Ruffini. Factorización

5. Utiliza la regla de Ruffini para hacer las siguientes divisiones:

a) $(x^7 - x)$ entre $(x + 2)$ b) $(x^5 + x - 2x^3) : (x - 1)$ c) $(3x^4 - 6) : (x + 1)$

[sol] a) $C(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 63$; $R(x) = -126$

b) $x^4 + x^3 - x^2 - x$; 0; c) $3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$; -3

6. Descompón en factores el polinomio $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$, sabiendo que $x = 1$ es una de sus raíces. [sol] $2(x-1)^2(x-3)$.

7. Halla el polinomio de segundo grado sabiendo que tiene por raíces $x = 1$ y $x = -6$ y que $P(0) = -12$. [sol] $2x^2 + 10x - 12$

8. Factoriza las siguientes expresiones polinómicas:

a) $3x^2 + 14x - 5$ b) $4x^5 + 2x^4 - 2x^3$ c) $x^3 + 5x^2 + 8x$

[sol] a) $3(x - 1/3)(x + 5)$; b) $4x^3(x - 1/2)(x + 1)$; c) $x(x^2 + 5x + 8)$

9. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = -5x^2 - x$ b) $P(x) = 4x^4 + 10x^2$ c) $P(x) = 10x^3 - 250x$

[sol] a) $-x(5x + 1)$; b) $2x^2(2x^2 + 5)$; c) $10x(x + 5)(x - 5)$;

10. Halla el valor de b y factoriza $P(x) = x^3 + bx^2 - 12x$ sabiendo que $x = -2$ es una de sus raíces. [sol] -4 ; $x(x+2)(x-6)$

Tipo III: Fracciones algebraicas

11. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{21x^2}{7x-14x^2}$ b) $\frac{4-x}{3x-12}$ c) $\frac{3x^2-4x}{x^3}$

d) $\frac{4x-8}{2x}$ e) $\frac{3x^2-12}{x+2}$ f) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$

[sol] a) $\frac{3x}{1-2x}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) $\frac{3x-4}{x^2}$; d) $\frac{2(x-2)}{x}$; e) $3(x-2)$; f) $\frac{x-1}{x+1}$

12. Simplifica:

$$\text{a) } \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} \quad \text{b) } \frac{4x^2 - 40x + 100}{4x^2 - 100} \quad \text{c) } \frac{3x^3 - 6x^2}{3x^4 + 24x^3 - 60x^2}$$

[sol] a) $\frac{x+7}{2}$; b) $\frac{x-5}{x+5}$; c) $\frac{1}{x+10}$

13. Halla, simplificando el resultado:

$$\text{a) } x - 1 + \frac{2}{x+1} \quad \text{b) } \frac{5}{x^2} + \frac{3x}{x^2+x} - \frac{3}{x+1} \quad \text{c) } \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 1$$

[sol] a) $\frac{x^2+1}{x+1}$; b) $\frac{5}{x^2}$; c) $\frac{2x^2+2}{(x+1)^2}$;

14. Calcula, factorizando si conviene, el resultado de:

$$\text{a) } \frac{2x-1}{3x-3} - \frac{2x^2-6x+4}{3x^2-6x+3} \quad \text{b) } \frac{3x^2-12x+12}{x^2-5x+6} : \frac{6x^3-54x}{x^3-6x^2+9x}$$

[sol] a) $\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{x-2}{2(x+3)}$

15. Racionaliza las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \quad \text{b) } \frac{x}{2\sqrt{x}} \quad \text{c) } \frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad \text{d) } \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \quad \text{e) } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$$

[sol] a) $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{x}$; b) $\frac{\sqrt{x}}{2}$; c) $\frac{(x+1)\sqrt{x}}{x}$; d) $\frac{-x-1+2\sqrt{x}}{x-1}$; e) $x + \sqrt{x(x-1)}$

Tipo IV: Aplicaciones

16. La altura de un cohete viene dada por la expresión $h(t) = 50t - 5t^2$, donde t viene dado en segundos y h(t) en metros.

- a) ¿Qué altura alcanza el cohete al cabo de 1, 2 y 5 segundos?
 b) ¿Y al cabo de 10 s? ¿Cómo interpretas este último resultado?

[sol] a) 45; 80; 125 b) 0; cae.

17. El coste total, en euros, de la producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la expresión $C(x) = 100\sqrt{x} + 1000$. Halla:

- a) El coste de producir 16, 100, y 400 unidades. ¿A cuánto sale la unidad en cada caso?
 b) Determina la expresión que da el coste por unidad cuando se fabrican x unidades.

[sol] a) 87,5; 20; 7,5 €; b) $c(x) = \frac{100\sqrt{x} + 1000}{x}$

18. Halla la expresión que da la superficie de un triángulo isósceles de perímetro 8 cm en función de la base x. Calcula el valor de esa área cuando $x = 3$.

[sol] $A(x) = \sqrt{4x^2 - x^3}$; 3 cm^2 .

19. Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo enlosado de 1,5 m de ancho. Si la piscina es 10 m más larga que ancha, halla:

- a) La expresión que da el área del rectángulo que delimita la piscina.
 b) La expresión que da el área del pasillo enlosado.

[sol] a) $x^2 + 16x + 39$; b) $6x + 39$