TEMA 5. Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Los valores de las incógnitas que cumplen la desigualdad son las soluciones. En general, una inecuación admite infinitas soluciones. Para resolver una inecuación hay que tener en cuenta las propiedades del orden.
Si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$; $a \cdot c \leq b \cdot c$ si $c > 0$; $a \cdot c \geq b \cdot c$ cuando $c < 0$.

<u>Inecuaciones lineales con una incógnita</u>. Son de la forma $ax + b \geq 0$.
Solución: $ax + b \geq 0 \Rightarrow ax \geq -b \Rightarrow x \geq -b/a$, si $a > 0$; $x \leq -b/a$, si $a < 0$.

<u>Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita</u>. Son de la forma: $\begin{cases} a\mathrm{x} + b \geq 0 \\ a'x + b' \geq 0 \end{cases}$

La solución de estos sistemas se obtiene resolviendo, por separado, cada una de las inecuaciones que lo componen y hallando los valores comunes a las soluciones encontradas.

<u>Inecuaciones de segundo grado</u>. Son de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$
Su resolución está ligada a la solución de su ecuación asociada, $ax^2 + bx + c = 0$, pues si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación, entonces $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$.
Estudiando los signos de cada factor se determinan los intervalos solución.
Es útil representar las soluciones x_1 y x_2 en la recta real y estudiar el signo de $a(x - x_1)(x - x_2)$ en los intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) y $(x_2, +\infty)$.

<u>Inecuaciones de grado superior a dos</u>. Son inecuaciones de la forma $P(x) < 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado superior a 2.
Se resuelven descomponiendo $P(x)$ en factores y estudiando el signo de cada uno de ellos.
Es útil representar las soluciones de $P(x) = 0$ en la recta real y estudiar el signo de $P(x)$ en los intervalos que se obtienen.

<u>Inecuaciones racionales</u>. En ellas la incógnita aparece en un denominador. Para resolverla hay que expresarla en la forma $0 \leq \dfrac{A(x)}{B(x)}$ (sin más términos).
Las soluciones se obtienen analizando los signos $A(x)$ y $B(x)$ para determinar el signo del cociente. Una buena estrategia consiste en señalar sobre una recta las soluciones de $A(x) = 0$ y de $B(x) = 0$, e ir estudiando el signo del cociente en los sucesivos intervalos que se presenten.

<u>Inecuaciones con valor absoluto</u>. Son de la forma $|A(x)| < n$, $n \geq 0$.
Para resolverlas aplicaremos la propiedad del valor absoluto: $|A(x)| < k \Leftrightarrow -k < A(x) < k$
La inecuación $|ax + b| < n \Leftrightarrow -n < ax + b < n \Leftrightarrow -n + b < ax < n - b$
La inecuación $|ax + b| > n$ se cumple si: $ax + b < -n$ o $ax + b > n$.
La inecuación $|ax^2 + bx + c| < n \Leftrightarrow -n < ax^2 + bx + c < n$, que da lugar a dos inecuaciones:
$-n < ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 0 < ax^2 + bx + c + n$; $ax^2 + bx + c < n \Leftrightarrow ax^2 + bx + c - n < 0$
La soluciones de $|ax^2 + bx + c| > n$ son las del intervalo complementario de $|ax^2 + bx + c| < n$

<u>Inecuaciones con expresiones radicales</u>: $\sqrt{A(x)} < n$; $\sqrt{A(x)} > n$

$$\sqrt{A(x)} < n \Rightarrow 0 \leq A(x) < n^2; \qquad \sqrt{A(x)} > n \Rightarrow A(x) > n^2$$