**TEMA 6. COMBINATORIA** **RESUMEN**

Factorial de un número

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ **Ejemplo**: 7! = 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1

Por convenio, factorial de cero se define como 1: 0! = 1 (También 1!=1).

Propiedades de los números factoriales

1. Fórmula de recurrencia: $n! = n\cdot(n-1)!$ **Ejemplo**: 10! = 10 · 9!

2. Simplificación: $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$ **Ejemplo**: $\dfrac{14!}{13!} = 14$

Números combinatorios

- $n$ sobre $r$: $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. **Ejemplo**: $\dbinom{15}{4} = \dfrac{15!}{4!(15-4)!} = \dfrac{15!}{4!\cdot 11!} = 1365$

Propiedades de los números combinatorios. Las más utilizadas son:

1. $\dbinom{n}{0} = 1$ 2. $\dbinom{n}{n} = 1$ **Ejemplos**: $\dbinom{16}{0} = 1$ $\dbinom{15}{15} = 1$

3. $\dbinom{n}{r} = \dbinom{n}{n-r}$ 4. $\dbinom{n}{r-1} + \dbinom{n}{r} = \dbinom{n+1}{r}$ **Ejemplos**: $\dbinom{16}{3} = \dbinom{16}{13}$; $\dbinom{15}{4} + \dbinom{15}{5} = \dbinom{16}{5}$

Potencia de un binomio

Fórmula de Newton para el cálculo de la potencia n-ésima de un binomio:

$$(p+q)^n = \binom{n}{0}p^n + \binom{n}{1}p^{n-1}q + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}pq^{n-1} + \binom{n}{n}q^n$$

$$(p-q)^n = \binom{n}{0}p^n - \binom{n}{1}p^{n-1}q + \binom{n}{2}p^{n-2}q^2 - \ldots \pm \binom{n}{n-1}pq^{n-1} \pm \binom{n}{n}q^n$$

**Ejemplo**: $(p+q)^3 = \dbinom{3}{0}p^3 + \dbinom{3}{1}p^2q + \dbinom{3}{2}pq^2 + \dbinom{3}{3}q^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$

Combinatoria

Principio fundamental de enumeración

Si un suceso puede elegirse de $m$ maneras distintas en primer lugar y a continuación puede elegirse de $n$ maneras diferentes, entonces puede suceder de $m \cdot n$ formas diferentes.

Diagramas de árbol. Para visualizar las distintas posibilidades que pueden presentarse resulta útil confeccionar un diagrama de árbol: de cada opción inicial surgen las diferentes ramas.

Variaciones de $m$ elementos tomados $n$ a $n$ ($n \le m$) son cada uno de los grupos diferentes, de $n$ elementos distintos cada grupo, que pueden formarse con los $m$ elementos que tenemos, teniendo en cuenta que dos grupos son diferentes cuando:

(1) tienen algún elemento distinto, o (2) están colocados en distinto orden.

- Número de variaciones: $V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))$

**Ejemplo**: $V_{16,\,8}$ = 16 · 15 · 14 · 13 · 12 · 11 · 10 · 9 → (ocho factores).

Variaciones con repetición de *m* elementos tomados *n* a *n* son cada uno de los grupos diferentes, de *n* elementos cada grupo, repetidos o no, que pueden formarse con los *m* elementos que tenemos, teniendo en cuenta que dos grupos son diferentes cuando:
(1) tienen algún elemento distinto, o (2) están colocados en distinto orden.

- Número de variaciones con repetición: $VR_{m,n} = m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$

**Ejemplos**: a) $VR_{6,4} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ b) $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$

Permutaciones de *n* elementos son cada uno de los grupos diferentes que pueden formarse con los *m* elementos que tenemos, teniendo en cuenta que dos grupos son diferentes cuando los elementos están colocados en distinto orden. (Coincide con las $V_{n,n}$ )

- Su número es $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

**Ejemplo**: Las permutaciones de 7 son: $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

Permutaciones con repetición de *m* elementos, en los que un elemento *A* se repite *a* veces, otro *B* se repite *b* veces, …, otro *H* se repite *h* veces, con $a + b + \ldots + h = m$, son cada uno de los grupos diferentes que pueden formarse de *m* elementos cada grupo, teniendo en cuenta que dos grupos son diferentes cuando los elementos están colocados en distinto orden.

- Su número se denota por $P_m^{a,b,\ldots h}$ y vale: $P_m^{a,b,\ldots h} = \dfrac{m!}{a! \cdot b \cdot \ldots \cdot h!}$

**Ejemplo**: $P_5^{2,3} = \dfrac{P_5}{P_2 \cdot P_3} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Combinaciones de *m* elementos tomados *n* a *n* ($n \le m$) son cada uno de los grupos diferentes, de *n* elementos distintos cada grupo, que pueden formarse con los *m* elementos que tenemos, teniendo en cuenta que dos grupos son diferentes solamente cuando hay algún elemento distinto.

- Número de combinaciones : $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n}$

Este número coincide con el número combinatorio $\binom{m}{n}$. Por tanto: $C_{m,n} = \binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

**Ejemplo**: $C_{16,5} = \binom{16}{5} = \dfrac{16!}{5! \cdot 11!} = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 11!} = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 4368$