Números complejos (Pendientes Matemáticas I)

1. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a) 2 + 3i b) –1 + i c) –2 –2i d) 4 – 3i

[Sol] a) – 2 – 3i, 2 – 3i; b) 1 – i, – 1 – i; c) 2 + 2i, - 2 + 2i; d) – 4 + 3i, 4 + 3i.

2. Completa la tabla:

z	−z	$\bar{z}$	1/z
2 – 3i			
	−1 + 4i		
		3 – 3i	
			i

[Sol] 1ª fila, -2+3i, 2+3i, $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}$i ; 2ª fila, 1-4i, 1+4i, $\frac{1}{17}+\frac{4}{17}$i ; 3ª fila, 3+3i, -3-3i, $\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$; 4ª fila, -i, i, i.

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(-\frac{5}{3}-i\right)+\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ b) $\left(-\frac{1}{4}-6i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}i\right)$ c) $(2-i)\cdot\left(\frac{5}{2}+3i\right)$

d) $(3-i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ e) $(-2i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ f) (3 – 2i)·(3 + 2i)

[Sol] a) $-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$i ; b) $1-\frac{15}{2}$i ; c) $8+\frac{7}{2}$i ; d) $\frac{9}{2}+\frac{7}{2}$i ; e) $3-2$i ; f) 13

4. Calcula: a) $i^{10}+i^{141}+i^{15}$ b) $(3-2i)^2$ c) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)^2$ d) $(-1+2i)^6$

[Sol] a) –1; b) 5 – 12i; c) $-\frac{5}{4}+3$i ; d) 117 – 44i.

5. Dados $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -3 + i$ y $z_3 = 5i$, calcula:

a) $z_1+z_2+z_3$ b) $z_1+2z_2-z_3$ c) $z_1(z_2+z_3)+z_3$

d) $\dfrac{z_2-z_1}{z_3}$ e) $(z_1+2z_3)(z_2-z_1)$

[Sol] a) 4i ; b) $-3-5$i ; c) $3+29$i ; d) $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}$i ; e) $-42-39$i .

6. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$ b) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^5$ c) $\dfrac{2}{3-i}$ d) $\dfrac{1+i}{1-i}$

[Sol] a)1; b) $-512\sqrt{3}-512$i ; c) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$i ; d) i .

7. (PAU) a) ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo, $z = a + bi$, y el opuesto del conjugado del mismo número? Razone la respuesta.

b) Calcule los números x e y de modo que $\dfrac{3-xi}{1+2i} = y + 2i$.

[Sol] a) son iguales; b) x = -16, y = 7.

8. Calcula en cada caso el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación correspondiente sea un número imaginario puro:

a) $(2-3i)(1+ki)$ b) $(k+\sqrt{2}i)^2$ c) $\dfrac{k-2i}{8+2i}$

[Sol] a) $k=-\frac{2}{3}$; b) $k=\pm\sqrt{2}$; c) $k=\frac{1}{2}$.

9. Calcula en cada caso el valor que ha de tener *k* para que el resultado de la operación correspondiente sea un número real:

a) $(3+ki)(6-3i)$ b) $\dfrac{k-2i}{5-6i}$ c) $\dfrac{1+i}{k+2i}$

[Sol] a) $k=\frac{3}{2}$; b) $k=\frac{5}{3}$; c) $k=2$.

10. Expresa en forma binómica:

a) 2(cos 135º + i sen 135º) · 3(cos 45º + i sen 45º) b) $[2\ (\cos 30º + i \text{ sen } 30º)]^5$

c) $\dfrac{4(\cos 240º + i\,sen\ 240º)}{\frac{1}{2}(\cos 30º + i\,sen\ 30º)}$ d) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\,sen\dfrac{5\pi}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\,sen\dfrac{\pi}{3}\right)$

[Sol] a) –6; b) $-16\sqrt{3}+16i$; c) $-4\sqrt{3}-4i$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$

11. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma binómica:

a) $2_{210º}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)_{60º}$ b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)_{150º} : 3_{30º}$ c) $\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{3}}\cdot 2_{\frac{4\pi}{3}}$

[Sol] a) $-\frac{1}{2}i$; b) $-\frac{1}{18}+\frac{\sqrt{3}}{18}i$; c) $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

12. Si $z = 4_{60º}$ y $z´ = 2_{45º}$ calcula:

a) z + z´ b) z · z´ c) $\dfrac{z}{z´}$ d) $z^2 \cdot z´$ e) $z^2\cdot\overline{z´}$ f) (-z) · z´

[Sol] a) $(2+\sqrt{2})+(2\sqrt{3}+\sqrt{2})i$; b) $8_{105º}$; c) $2_{15º}$; d) $32_{165º}$; e) 32_{75}; f) $8_{285º}$

13. Encuentra la ecuación que tiene por raíces:

a) 2 - *i* y 2 + *i* b) 2, –3, *i* y –*i*

[Sol] a) $z^2 - 4z + 5 = 0$; b) $z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6 = 0$.

14. Halla las soluciones, reales o complejas, de las ecuaciones:

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ b) $z^4 - 256 = 0$ c) $z^4 + \left(1-\sqrt{3}i\right) = 0$.

[Sol] a) 1 + 2i, 1 – 2i; b) 4, -4, 4i, -4i; c) $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{30º}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{120º}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{210º}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{300º}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^5 - 1 = 0$ b) $z^3 + 8 = 0$

[Sol] a) $1_{0º}$; $1_{72º}$; $1_{144º}$; $1_{216º}$ y $1_{288º}$; b) $2_{60º}$; $2_{180º}$ y $2_{300º}$;