

## Tema 16. (II) APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS: ESTUDIO DE UNA FUNCIÓN

## Resumen

- El signo de la derivada primera de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la determinación de máximos y mínimos relativos.

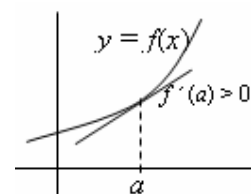
Crecimiento y decrecimiento (monotonía)

- $f(x)$  es creciente en un punto  $x = a$  si  $f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$ , para  $h > 0$  y pequeño. (Si se sustituye  $\leq$  por  $<$ , se hablaría de crecimiento estricto.)
- $f(x)$  es decreciente en un punto  $x = a$  si  $f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$ , para  $h > 0$  y pequeño.
- La función  $f(x)$  es creciente (decreciente) en un intervalo cuando crece (decrece) en todos los puntos de él.

Caracterización mediante la derivada primera

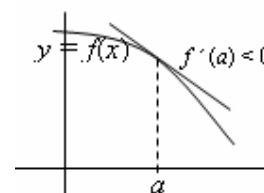
- Crecimiento: Si  $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$  es creciente en  $x = a$ .

En general, si una función  $f(x)$  es tal que  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  de un intervalo, entonces  $f(x)$  es creciente en ese intervalo.



- Decrecimiento: Si  $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$  es decreciente en  $x = a$ .

Si una función  $f(x)$  es tal que  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  de un intervalo, entonces  $f(x)$  es decreciente en ese intervalo.



- Máximos. El punto  $x_1$  es un máximo relativo cuando la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha.

Por tanto:  $x_1$  es un máximo si:  $f'(x_1^-) > 0$ ,  $f'(x_1) = 0$ ,  $f'(x_1^+) < 0$

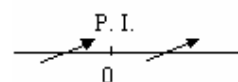
- Mínimos. El punto  $x_2$  es un mínimo relativo cuando la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

Por tanto:  $x_2$  es un mínimo si:  $f'(x_2^-) < 0$ ,  $f'(x_2) = 0$ ,  $f'(x_2^+) > 0$

- La determinación de los puntos singulares (aquellos en los que la derivada vale 0, llamados también estacionarios; y los puntos en los que la función no está definida) nos permitirá obtener el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos.

Advertencia. No siempre que  $f'(x) = 0$  se tiene un máximo o un mínimo; ni siquiera esto es una condición necesaria.

- Puede haber mínimo sin que  $f'(x) = 0$ : Así, por ejemplo, la función  $f(x) = |x|$  tiene un mínimo en  $x = 0$  y en ese punto no es derivable la función.
  - Puede suceder que  $f'(x) = 0$  y no haya mínimo ni máximo. Así pasa en el punto  $x = 0$  para la función  $f(x) = x^3$ . Su derivada,  $f'(x) = 3x^2$ , se anula en  $x = 0$ , pero:
    - Si  $x < 0$ , (por ejemplo,  $x = -1$ ),  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  es creciente.
    - Si  $x > 0$ , (por ejemplo,  $x = 1$ ),  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  es creciente.
- Por tanto, en  $x = 0$  no hay máximo ni mínimo. Hay un punto de inflexión.



Trazado de gráficas con ayuda de la derivada primera

Dada la función  $y = f(x)$ , para dibujarla es útil el siguiente proceso:

1. Determinar los puntos en los que no está definida  $f(x)$ .
2. Hallar la derivada  $f'(x)$ .
3. Calcular las soluciones de la ecuación  $f'(x) = 0$  (puntos singulares).
4. Marcar sobre el eje  $OX$  los puntos singulares y aquellos en los que la función no está definida. Esos puntos dividen al eje  $OX$  en varios intervalos.
5. Estudiando el signo de la derivada en cada intervalo anterior, determinar si la función es creciente o decreciente. (Basta con probar un punto de cada intervalo y ver si  $f'(x)$  es positiva o negativa.)
6. Deducir (de lo anterior) dónde se dan los máximos y los mínimos, si es el caso.
7. Trazar la gráfica ajustándose a la información obtenida y dando algunos de sus puntos, entre los correspondientes a los puntos singulares y a los cortes con los ejes de coordenadas.

**Ejemplo:** Trazado de la gráfica de la función  $f(x) = x^5 - 2x^3$ .

1. Está definida siempre.

2 y 3.  $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 \Rightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(5x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{\frac{6}{5}}, x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$

4, 5 y 6. Marcamos los puntos:

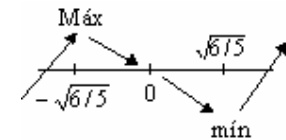
• Si  $x < -\sqrt{\frac{6}{5}}$ , (por ejemplo,  $x = -2$ ),  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  es creciente.

• Si  $-\sqrt{\frac{6}{5}} < x < 0$ , (por ejemplo,  $x = -1$ ),  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  es

decreciente  $\Rightarrow$  en  $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$  hay máximo

• Si  $0 < x < \sqrt{\frac{6}{5}}$ , (por ejemplo,  $x = 1$ ),  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  es decreciente  $\Rightarrow$  en  $x = 0$  no hay ni máximo ni mínimo.

• Si  $x > \sqrt{\frac{6}{5}}$ , (por ejemplo,  $x = 3$ ),  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  es creciente  $\Rightarrow$  en  $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$  hay mínimo



7. Dando algunos valores se obtiene la gráfica adjunta.

Para  $x = 0$ ,  $f(0) = 0 \rightarrow$  punto  $(0, 0)$

Para  $x = -\sqrt{\frac{6}{5}} \approx -1,1$ ,  $f(-\sqrt{\frac{6}{5}}) \approx 1,05 \rightarrow$  punto  $(-1,1, 1,05)$

Para  $x = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1,1$ ,  $f(\sqrt{\frac{6}{5}}) \approx -1,05 \rightarrow$  punto  $(1,1, -1,05)$

Los cortes con el eje  $OX$  son las soluciones de  $x^5 - 2x^3 = 0$ , que son  $x = 0$  y  $x = \pm\sqrt{2} \rightarrow$  puntos  $(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, 0)$  y  $(\sqrt{2}, 0)$ .

