

Tema 8. Operaciones con fracciones

Resumen

Reducción de dos o más fracciones a común denominador

Para reducir fracciones a común denominador se halla un número que sea múltiplo de los denominadores; a continuación se buscan fracciones equivalentes a las dadas pero con ese denominador común.

Un denominador común se obtiene multiplicando los denominadores de todas las fracciones. Aunque sea más costoso, se prefiere hallar fracciones con el menor denominador común, que se obtiene calculado el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo:

Dadas las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{12}$, las equivalentes a ellas con el mismo denominador son,

respectivamente, $\frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12}$ y $\frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8}$. Esto es: $\frac{36}{96}$ y $\frac{56}{96}$.

- Si optamos por hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores, $\text{mcm}(8, 12) = 24$, las fracciones obtenidas serán: $\frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3}$ y $\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2}$. Esto es: $\frac{9}{24}$ y $\frac{14}{24}$. (Es evidente que estas fracciones son más cómodas de manejar que las anteriores).

Comparación de fracciones

- Si las fracciones tienen el mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo: $\frac{9}{17} < \frac{12}{17}$, pues $9 < 12$. Igualmente, $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$.

- Si las fracciones tienen el mismo numerador es mayor la que tiene menor denominador.

Ejemplo: $\frac{9}{17} < \frac{9}{14}$, pues $17 > 14$. Igualmente, $\frac{5}{9} < \frac{5}{7}$.

- Cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, se reducen a común denominador y se comparan mediante el criterio anterior; aunque la forma matemática preferida es la aplicación de la regla que se indica más abajo. (No obstante, la forma más rápida de comparar fracciones es hallar su valor con la calculadora y comparar sus resultados.)

Ejemplo: ¿Qué fracción es mayor, $\frac{9}{21}$ o $\frac{31}{70}$?

Como las fracciones equivalentes a ellas con el mismo denominador son $\frac{9 \cdot 70}{21 \cdot 70} = \frac{630}{1470}$ y

$\frac{31 \cdot 21}{70 \cdot 21} = \frac{651}{1470}$, entonces $\frac{9}{21} < \frac{31}{70}$.

- Con la calculadora, $\frac{9}{21} = 0,42857\dots$ y $\frac{31}{70} = 0,44285\dots$

Regla de comparación de fracciones: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

Ejemplo: ¿Qué fracción es mayor, $\frac{9}{19}$ o $\frac{33}{71}$? \rightarrow Multiplicando en cruz se tiene: $9 \cdot 71 = 639$;

$33 \cdot 19 = 627$. Como $9 \cdot 71 > 33 \cdot 19 \Rightarrow \frac{9}{19} > \frac{33}{71}$.

Suma y resta de fracciones

- Si las fracciones tienen el mismo denominador: la fracción suma o resta es la que tiene por numerador la suma o resta de los numeradores y por denominador el común.

Ejemplo: a) $\frac{4}{15} + \frac{7}{15} = \frac{4+7}{15} = \frac{11}{15}$. b) $\frac{4}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4+5-2}{9} = \frac{7}{9}$.

- Si las fracciones tienen distinto denominador: se reducen a común denominador y se procede como antes.

Ejemplo: a) $\frac{2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{8}{36} + \frac{15}{36} = \frac{8+15}{36} = \frac{23}{36}$. b) $\frac{7}{15} - \frac{2}{9} = \frac{21}{45} - \frac{10}{45} = \frac{21-10}{45} = \frac{11}{45}$.

Suma o resta de números enteros y fracciones

Si se escribe el número como una fracción con denominador 1, la operación se reduce a alguna de las anteriores.

Ejemplos: a) $3 + \frac{4}{15} = \frac{3}{1} + \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 15 + 4 \cdot 1}{15} = \frac{49}{15}$. b) $4 - \frac{3}{7} = \frac{4}{1} - \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 7 - 3 \cdot 1}{7} = \frac{25}{7}$.

Multipliación de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador, el producto de los denominadores. Esto es: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Ejemplo: a) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 9} = \frac{20}{63}$. b) $\frac{5}{12} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 10} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$.

Multipliación de un número entero por una fracción

La fracción resultante tiene como numerador el producto del número por el numerador; el denominador será el mismo. Esto es: $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d}$ y $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$.

Ejemplos: a) $7 \cdot \frac{5}{11} = \frac{7 \cdot 5}{11} = \frac{35}{11}$. b) $\frac{3}{14} \cdot 6 = \frac{3 \cdot 6}{14} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$.

División de fracciones

La fracción resultante tiene como numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, y como denominador, el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Esto es, sus términos se multiplican en cruz $\rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Ejemplos: a) $\frac{6}{7} : \frac{3}{9} = \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 3} = \frac{54}{21} = \frac{18}{7}$. b) $\frac{3}{11} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{11 \cdot 5} = \frac{21}{55}$.

División de un número entero por una fracción y de una fracción por un número entero

Escribiendo el número entero como una fracción con denominador 1 la operación se hace como se ha indicado en general. Esto es: $a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{c}$; $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b \cdot c}$.

Ejemplos: a) $4 : \frac{5}{7} = \frac{4}{1} : \frac{5}{7} = \frac{28}{5}$. b) $\frac{3}{8} : 6 = \frac{3}{8} : \frac{6}{1} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$.

Prioridad de operaciones y uso de paréntesis

Cuando las operaciones aparecen combinadas, primero se resuelven los paréntesis, después las multiplicaciones y divisiones; por último, las sumas y restas.

Ejemplos: a) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(\frac{15}{20} + \frac{4}{20}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{180}$
 b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9}\right) \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{3}{36} + \frac{1}{5} = \frac{15}{180} + \frac{36}{180} = \frac{51}{180} = \frac{17}{60}$.