Tema 2. Divisibilidad Resumen

Un número <u>*a* es múltiplo por otro *b*</u> si la división de *a* entre *b* es exacta. (Los números *a* y *b* deben ser naturales, aunque el concepto se extiende sin dificultad a los números enteros).
También puede decirse que <u>*b* es divisor de *a*</u>.

- Si *a* es múltiplo de *b* entonces *b* es divisor de *a*, y viceversa.
- Todo número entero tiene infinitos múltiplos, que se obtiene multiplicándolo por 0, 1, 2…
- Todo número es divisor y múltiplo de sí mismo.
- El número 0 es múltiplo de todos los números.
- El número 1 es divisor de todos los números.

<u>Divisores de un número; números primos</u>
Un número puede tener varios divisores → Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, y 12.
Si un número solo es divisible por sí mismo y por la unidad se llama <u>primo</u>.
Ejemplos:
a) Los números 7, 17 o 23 son primos.
b) 28, 39 y 69 no son primos: 28 = 4 · 7; 39 = 3 · 13; 69 = 3 · 23.

<u>Descomposición factorial de un número</u>
Descomponer un número en factores es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.
Ejemplos:
a) 72 = 2 · 36; o también, 72 = 8 · 9 = 2 · 3 · 12.
b) 100 = 2 · 50 = 4 · 25 = 10 · 10 = 2 · 2 · 5 · 5.

- Cuando todos los factores son primos se dice que el número está descompuesto como producto de factores primos.

Ejemplos:
a) 72 puede escribirse como: 72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 → $72 = 2^3 \cdot 3^2$.
b) 100 = 2 · 2 · 5 · 5 → $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

- Factor de un número es cada uno de sus divisores.
- Factorizar un número es escribirlo como producto de algunos de sus divisores.
- Un número puede descomponerse factorialmente de varias maneras.
- Un número puede descomponerse en producto de sus factores primos de manera única, salvo el orden de esos factores.

Ejemplos:
Los números 72 y 100 se han escrito más arriba como producto de factores primos:
a) 72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 = 3 · 2 · 3 · 2 · 2; el orden no influye. → $72 = 2^3 \cdot 3^2$.
b) 100 = 2 · 2 · 5 · 5 = 5 · 5 · 2 · 2 = 2 · 5 · 2 · 5 → $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

<u>Criterios de divisibilidad</u>

- <u>Divisibilidad por 2</u>. Un número es divisible por 2 si es par.

Ejemplos: 2, 24 o 130 son múltiplos de 2. Los números 21 y 33 no son múltiplos de 2.

- <u>Divisibilidad por 3</u>. Un número es divisible por 3 si la suma de los valores de sus cifras en múltiplo de 3.

Ejemplos: 99, 132 o 2124 son múltiplos de 3, pues sus cifras suman, respectivamente, 18, 6 o 9, que son números múltiplos de 3.
Los números 122 o 2222 no son múltiplos de 3.

- Divisibilidad por 5. Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5.

Ejemplos: 100, 205, 2000 y 2375 son múltiplos de 5.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números

- Dos números pueden tener varios divisores comunes. El mayor de ellos se llama máximo común divisor: m.c.d.

Ejemplo:
Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.
Los divisores de 48 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48.
Los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son divisores comunes de 36 y 48. El mayor de ellos es 12; este es el m.c.d. de 36 y 48. Se escribe: m.c.d.(36, 48) = 12.

- Dos números tienen infinitos múltiplos comunes. El menor de ellos se llama mínimo común múltiplo: m.c.m.

Ejemplo:
100, 250 y 500 son múltiplos comunes de 10 y de 25. Ninguno de ellos es el m.c.m.(10, 25), pues 50, que es menor que todos ellos, también es múltiplo de ambos: m.c.m.(10, 25) = 50.

Criterio para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos números.
Para determinar el m.c.d. y el m.c.m. de dos o más números se descomponen los números dados en sus factores primos.

- El m.c.d. se obtiene multiplicando los factores primos comunes a ambos números (en este criterio suele añadirse "con el menor exponente").
- El m.c.m. se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes a ambos números (afectados con el mayor exponente).

Ejemplo:
a) Los números 24 y 36 se descomponen así:
$24 = 2^3 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$
m.c.d.(24, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$. m.c.m.(24, 36) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$.
b) Para 10 y 25:
$10 = 2 \cdot 5$; $25 = 5^2$
m.c.d.(10, 25) = 4. m.c.m.(10, 25) = $2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$.
c) Los números 24 y 25 no tienen divisores comunes, salvo el 1: se llaman primos entre sí. Su m.c.d. es 1; su m.c.m. es su producto.
m.c.d.(24, 25) =1. m.c.m.(24, 25) = $24 \cdot 25 = 600$.

→ Una aplicación.
En una carrera de Fórmula 1 uno de los coches (A) tarda 2 minutos en dar una vuelta al circuito; otro coche (B) tarda 2 min, 15 s en dar la misma vuelta. Si salen de meta a la vez:
a) ¿Cuánto tiempo tarda el coche A en doblar al coche B? (Doblar consiste en alcanzarlo; en adelantarlo viniendo desde atrás).
b) ¿Cuántas vueltas habrá dado cada coche en ese momento?

Solución:
a) Los coches coinciden en los múltiplos comunes de ambos tiempos, que deben expresarse en segundos: 120 s el coche A; 135 s el B.
Como $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $135 = 3^3 \cdot 5 \Rightarrow$ m.c.m.(120, 135) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ = 1080 s.
b) En ese tiempo el coche A da 9 vueltas (1080 : 120 = 9) y el coche B da 8 vueltas (1080 : 135 = 8).