

Tema 4. Potencias y Fracciones (III)**Resumen**

La potencia de una fracción tiene el mismo significado que la potenciación en general, y se cumplen las mismas propiedades que en potenciación con números enteros.

Propiedades de la potenciación con números enteros:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (a : b)^n = a^n : b^n$$

Potencia de una fracción. Definición: $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Propiedad inicial: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. También se emplea al revés: $\frac{p^n}{q^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n$.

Ejemplos:

$$\text{a) } \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}. \quad \text{b) } \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}. \quad \text{c) } \frac{6^3}{9^3} = \left(\frac{6}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Producto y cociente de potencias de la misma base:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Ejemplos: a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$; b) $\left(\frac{4}{5}\right)^5 : \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Potencia de un producto de fracciones: $\left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$

Ejemplo: $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 4}\right)^4 = \left(\frac{9}{12}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$.

Potencia de un cociente de fracciones: $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$

Ejemplos: $\left(\frac{1}{3} : \frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} : \frac{5^3}{6^3} = \frac{1}{27} : \frac{125}{216} = \frac{216}{27 \cdot 125} = \frac{216}{3375} = \frac{8}{125}$.

• En este caso, conviene operar antes el paréntesis: $\left(\frac{1}{3} : \frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{15}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$.

Potencia de una potencia: $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$ **Ejemplo:** $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^8$.

Potencia de exponente 0: $a^0 = 1$; $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ **Ejemplos:** $\left(\frac{7}{8}\right)^0 = 1$; $\left(\frac{-1}{5}\right)^0 = 1$.

Potencia de exponente negativo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Ejemplos: a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$. b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$. c) $\frac{2^{-3}}{3^{-3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$.

Números y potencias de base 10

La potencia 10^n equivale a la unidad de orden de magnitud n ; esto es, 1 seguido de tantos ceros como indica el exponente n . Así:

$$10^0 = 1 \text{ (unidad).} \quad 10^1 = 10 \text{ (decena: orden de magnitud 1).}$$

$$10^2 = 100 \text{ (centena: magnitud 2).} \quad 10^3 = 1000 \text{ (unidad de millar: magnitud 3) ...}$$

Si se extienden esta notación a exponentes negativos se tiene:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ (décima).} \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ (centésima)}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001 \text{ (milésima).} \quad 10^{-4} = 0,0001; \dots; 0,000001 = 10^{-6} \dots$$

Por tanto, cualquier número entero o decimal, puede escribirse mediante potencias de 10.

Ejemplos:

$$a) 7345304 = 7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

$$b) 368,098 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 300 + 60 + 8 + 0,0 + 0,09 + 0,008.$$

Números muy grandes o muy pequeños

Las potencias de 10 facilitan la expresión de números de muchas cifras, decimales o no. En muchos de ellos, para facilitar la comprensión de la cantidad conviene redondear.

Ejemplos:

$$a) 160000000 = 16 \cdot 100000000 = 16 \cdot 10^8. \text{ También: } 1,6 \cdot 1000000000 = 1,6 \cdot 10^9$$

$$b) 0,00000089 = 89 \cdot 0,00000001 = 89 \cdot 10^{-8}. \text{ También: } 8,9 \cdot 10^{-7}$$

Fracciones y números decimales.

Al dividir el numerador entre el denominador se obtiene un número decimal. Por tanto, una fracción puede considerarse como un número decimal.

$$\text{Ejemplos: } \frac{3}{5} = 0,6; \frac{3}{8} = 0,375; \frac{12}{5} = 2,4; \frac{23}{100} = 0,23; \frac{2}{3} = 0,666\dots$$

- Y al revés, los números decimales (con un número finito de cifras decimales o con infinitas cifras decimales periódicas) pueden escribirse como una fracción.

$$\text{Ejemplos: } 0,78 = \frac{78}{100}; 3,2 = \frac{32}{10}; 0,375 = \frac{375}{1000}.$$

Para obtener la fracción equivalente (generatriz) a un número decimal periódico hay que multiplicar el número dado por 10, 100, ..., según convenga, a fin de que al restar los números se consiga eliminar las cifras decimales.

Ejemplo: Si el número es 2,5676767... → Se escribe $F = 2,5676767\dots$

- Se multiplica por 1000: $1000 \cdot F = 2567,6767\dots$

- Se multiplica por 10: $10 \cdot F = 25,6767\dots$

- Se restan esos números: $990 \cdot F = 2542 \rightarrow$ Se despeja $F: F = \frac{2542}{990}$.

Los números racionales, son todos los que pueden escribirse en forma de fracción.

Los números racionales son: los naturales, los enteros, los decimales con un número finito de cifras decimales, y los números decimales periódicos.

- Los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no son racionales. Se llaman números irracionales. Por ejemplo: 7,01002000300004...