

Tema 8. Sistemas de ecuaciones lineales

Resumen

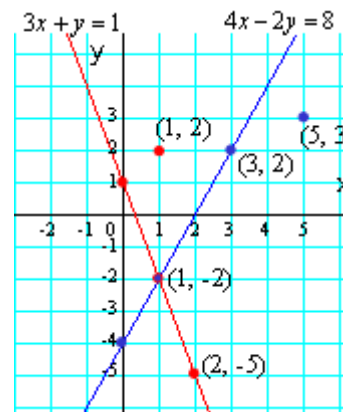
Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Son expresiones de la forma $ax + by = c$. Las incógnitas son x e y , mientras que a , b y c son números.

- La solución de estas ecuaciones son pares de valores (uno para x y otro para y) que cumplen la ecuación.

Ejemplos:

a) $4x - 2y = 8$. El par $x = 3$ e $y = 2$ es solución, pues $4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8$. También es solución el par $x = 1$ e $y = -2$. El par $x = 5$ e $y = 3$ no es solución de esa ecuación, pues $4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 14 \neq 8$.

b) La ecuación $3x + y = 1$ tiene por soluciones $x = 2$ e $y = -5$; $x = 1$ e $y = -2$, e infinitos pares más. El par $x = 1$ e $y = 2$ no es solución de ella.



- Una ecuación con dos incógnitas tiene infinitos pares de soluciones. Esos pares se corresponden con los puntos de una recta.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Su forma más simple es
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- La solución de un sistema es el par de valores de x e y que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Ejemplo: Las dos ecuaciones del ejemplo anterior determinan el sistema
$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$
. Su

solución es $x = 1$ e $y = -2$, ya que ese par es solución de ambas ecuaciones.

- Como puede verse, los valores solución, $x = 1$ e $y = -2$, se corresponden con las coordenadas del punto $(1, -2)$, que es el de corte de las rectas asociadas a cada una de las ecuaciones.

- Hay varios métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción.

Sustitución: Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y su valor se sustituye en la otra ecuación. Se obtiene una nueva ecuación, cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: Para resolver el sistema
$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$
:

1º. Se despeja y en la segunda ecuación ($y = 1 - 3x$).

2º. Se lleva (se sustituye) su valor a la primera ecuación: $4x - 2(1 - 3x) = 8$.

3º. Se resuelve la nueva ecuación: $4x - 2(1 - 3x) = 8 \Rightarrow 4x - 2 + 6x = 8 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$.

4º. El valor $x = 1$ se lleva a la ecuación despejada: $y = 1 - 3 \cdot 1 = -2$.

La solución del sistema es: $x = 1$ e $y = -2$.

Igualación: Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando ambas incógnitas se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.

Ejemplo: En el mismo sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$, puede despejarse la incógnita y en las dos

ecuaciones. Se obtiene: $\begin{cases} 4x - 8 = 2y \\ y = 1 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = y \\ y = 1 - 3x \end{cases}$.

Igualando: $2x - 4 = 1 - 3x \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$.

El valor $x = 1$ se lleva a la cualquiera de las ecuaciones: $y = 1 - 3 \cdot 1 = -2$.

La solución del sistema es: $x = 1$ e $y = -2$.

Reducción: Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

Ejemplo: En el sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$, si se multiplica la segunda ecuación por 2, queda:

$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones, término a término, se obtiene $10x = 10 \Rightarrow x = 1$.

Ese valor $x = 1$ se sustituye en cualquiera de las ecuaciones; se obtiene $y = -2$.

Observación: Los sistemas que no tiene solución se llaman incompatibles.

Resolución de problemas con ayuda de sistemas: llámale x ; llámale y .

La aplicación de sistemas es necesaria cuando en un problema hay dos incógnitas. A una de esas incógnitas se le llama x , a la otra y .

Para resolver un problema, debes:

- 1.º Leer detenidamente el problema: saber qué datos te dan y lo que te piden encontrar.
- 2.º Descubrir las relaciones entre los datos y las incógnitas. Escribir esas relaciones en forma de igualdad. Con las ecuaciones halladas se forma un sistema.
- 3.º Resolver ese sistema.
- 4.º Comprobar que la solución obtenida es correcta.

Ejemplo: En una granja, entre gallinas y conejos hay 72 cabezas y 184 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Se desconoce el número de gallinas y el número de conejos. Si se llama x al número de gallinas, e y al de conejos, debe cumplirse: $x + y = 72 \rightarrow$ gallinas + conejos = 72.

Cada gallinas tiene 2 patas \Rightarrow entre las x gallinas tendrán $2x$ patas.

Cada conejo tiene 4 patas \Rightarrow entre los y conejos tendrán $4y$ patas.

En total hay 184 patas: $2x + 4y = 184$.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x + y = 72 \\ 2x + 4y = 184 \end{cases}$.

Multiplicando por 4 la primera ecuación se tiene: $\begin{cases} 4x + 4y = 288 \\ 2x + 4y = 184 \end{cases} \Rightarrow$ (restando)

$\Rightarrow 2x = 104 \Rightarrow x = 52 \rightarrow$ (sustituyendo $x = 52$ en la primera ecuación) $\rightarrow y = 20$.

Por tanto, en la granja hay 52 gallinas y 20 conejos.

• Comprobación:

Número de cabezas: $52 + 20 = 72 \rightarrow$ de acuerdo con el enunciado.

Número de patas: $52 \cdot 2 + 20 \cdot 4 = 104 + 80 = 184 \rightarrow$ de acuerdo con el enunciado.