

Tema 9. (I) Geometría. Teorema de Pitágoras

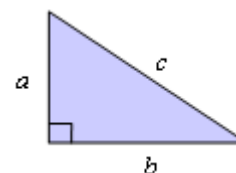
Resumen

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Esto es: $c^2 = a^2 + b^2$.

Ejemplo:

Si $a = 3$ y $b = 4$, el lado c cumple que $c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5$.



- Igualmente, si los lados, a , b y c , de un triángulo verifican la relación $c^2 = a^2 + b^2$, siendo c el de mayor longitud, el triángulo es rectángulo.

Ejemplos:

a) El triángulo de lados 12, 9 y 8 no es rectángulo, pues $12^2 \neq 9^2 + 8^2$, ya que

$$12^2 = 144 \neq 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145.$$

b) El triángulo de lados 17, 15 y 8 sí es rectángulo, pues $17^2 = 15^2 + 8^2$, ya que

$$17^2 = 289 = 225 + 64 = 15^2 + 8^2.$$

- El teorema de Pitágoras permite conocer un lado desconocido de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los otros dos, pues:

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 &\Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 &\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} &a = \sqrt{c^2 - b^2} &b = \sqrt{c^2 - a^2} \end{aligned}$$

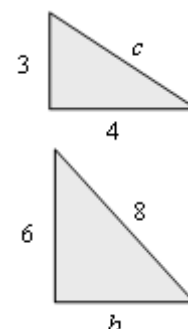
Ejemplos:

a) Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa, c , cumple que:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5.$$

b) Si la hipotenusa vale $c = 8$ cm y un cateto vale $a = 6$ cm, el otro cateto, b , cumple:

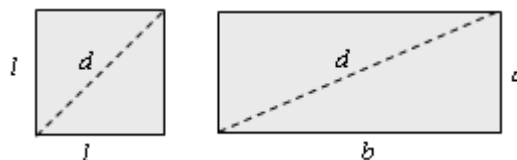
$$(b^2 = c^2 - a^2) \Rightarrow b^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow b = \sqrt{28} \approx 5,29.$$



Algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras

En muchas figuras geométricas (cuadrados, rectángulos, triángulos...), el teorema de Pitágoras permite calcular diagonales, lados, alturas, apotemas... Para ello, en todos los casos, hay que construir el triángulo rectángulo apropiado.

- En los cuadrados y en los rectángulos puede hallarse la diagonal cuando se conocen los lados.



En el cuadrado: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2} \cdot l$.

También podría hallarse el lado conociendo la diagonal.

En el rectángulo: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

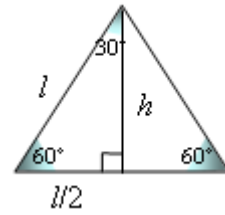
También podría hallarse un lado conociendo la diagonal y el otro lado.

Ejemplos:

a) Si el lado de un cuadrado vale 6 cm, su diagonal es $d = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8,48$.

b) Si la diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su base mide 8 cm, entonces puede calcularse su altura, y vale: $a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow a = 6$ cm.

- En un triángulo equilátero, para cualquier vértice, la altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del lado (de la base). Por tanto, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.



$$\text{Esto es: } l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}.$$

Por lo mismo, conociendo la altura puede calcularse la medida del lado.

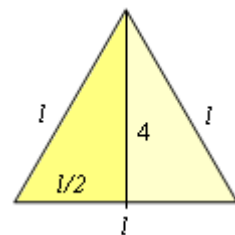
Ejemplos:

- a) Si el lado de un triángulo equilátero mide 15 cm, su altura valdrá:

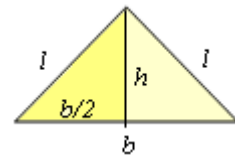
$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot 15}{2} \approx 13 \text{ cm.}$$

- b) Si la altura de un triángulo equilátero mide 4 cm, entonces:

$$l^2 = 4^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = 16 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow 4l^2 = 64 + l^2 \Rightarrow 3l^2 = 64 \Rightarrow \\ \Rightarrow l^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4,61 \text{ cm.}$$



- En un triángulo isósceles la altura correspondiente al lado desigual divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos de hipotenusa el lado del triángulo y uno de sus catetos igual a la mitad del otro lado. Por tanto, conociendo los lados, la altura podría hallarse aplicando el teorema de Pitágoras.

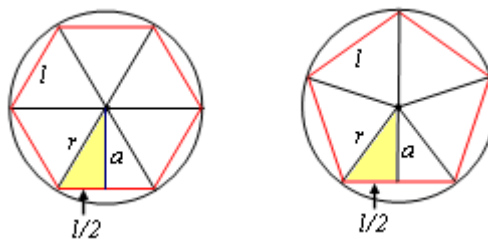


Ejemplo:

Si en el triángulo adjunto el lado $l = 5$ cm y la base $b = 8$ cm, se cumple:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow 25 - 16 = h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3.$$

- En los polígonos regulares pueden establecerse relaciones pitagóricas entre el lado del polígono, su apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.



Como puede observarse, se establece la relación: $r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$. Por tanto, conociendo dos de las tres medidas puede obtenerse la otra.