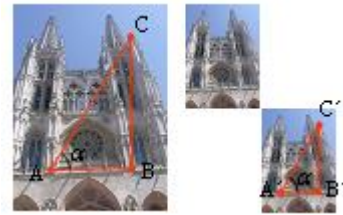


Tema 9. (II) Geometría: Semejanza, teorema de Tales

Resumen

- Intuitivamente, puede decirse que dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma: son iguales salvo en su tamaño; una es más grande que otra, pero sin deformaciones. Las ampliaciones o reducciones fotográficas son semejantes.
- Matemáticamente, dos figuras son semejantes cuando las medidas (las distancias) en una de ellas son proporcionales a las medidas correspondientes en la otra. El cociente de ambas medidas se llama razón de semejanza.



Que no haya deformaciones significa que los ángulos formados en una de ellas son iguales a los correspondientes en la otra.

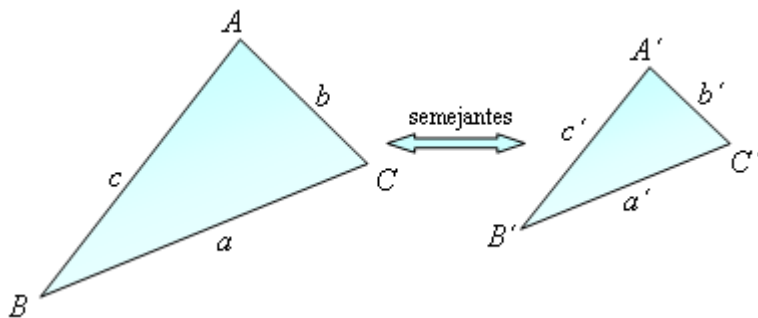
Ejemplos:

- La razón de semejanza entre las dos fotografías de la portada de la catedral de Burgos es 0,5. Si se divide la medida de cualquier distancia de la foto pequeña por su correspondiente en la otra, el cociente es 0,5: $d(A' \text{ a } B') / d(A \text{ a } B) = 0,5$. Igualmente, $d(A', C') / d(A, C) = 0,5$. Los ángulos de vértice A y A' son iguales; lo mismo pasa con B y C..
- Los planos, los mapas y las maquetas son representaciones semejantes de sus correspondientes en la realidad. En todos los casos, la razón de semejanza viene expresada por la escala. Así, un plano hecho a escala 1 : 100 indica que 1 cm del plano equivale a 100 cm (1 metro) en la realidad; y al revés, cada metro de la realidad debe representarse como 1 cm en el plano.



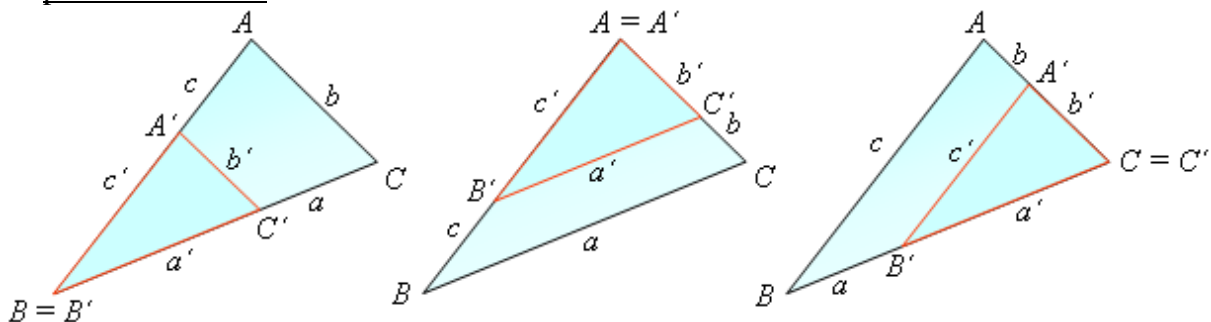
Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen iguales los ángulos y proporcionales los lados correspondientes.



Se cumple que:
 $\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}'$;
 $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

Si dos triángulos son semejantes pueden superponerse un ángulo y los dos lados que lo forman; los lados no comunes serían paralelos. Los triángulos puestos así se dicen que están en posición de Tales.



Teorema de Tales

El teorema de Tales relaciona las longitudes de los segmentos obtenidos al cortar un conjunto de rectas paralelas por dos rectas cualesquiera. Se puede formular como sigue:

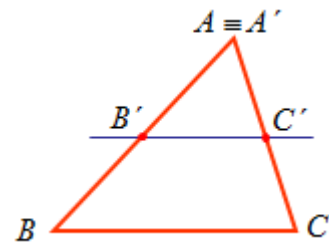
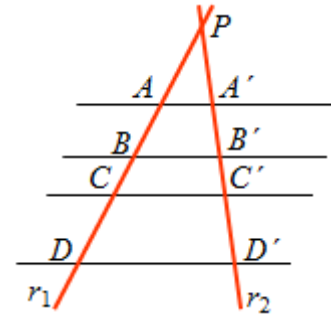
“Si se tiene un conjunto de rectas paralelas y son cortadas por otras dos rectas r_1 y r_2 , entonces, las medidas de los segmentos determinados en una de las rectas secantes (en r_1) son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes determinados en la otra (en r_2)”.

Por tanto: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

También puede verse que los triángulos PAA' , PBB' , PCC' ... son semejantes (están en posición de Tales): tienen dos lados superpuestos y el tercero, paralelo. Luego, también se cumple que:

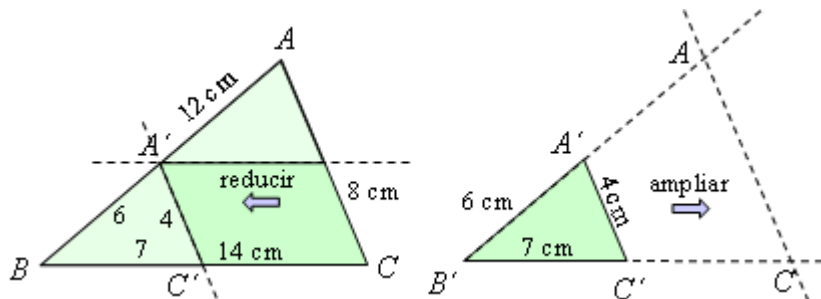
$$\frac{PA}{AA'} = \frac{PB}{BB'} = \frac{PC}{CC'}$$

- De otra manera. Toda paralela a un lado de un triángulo, ABC , determina otro triángulo pequeño, $A'B'C'$, semejante al grande (Los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en posición de Tales).



Ejemplos:

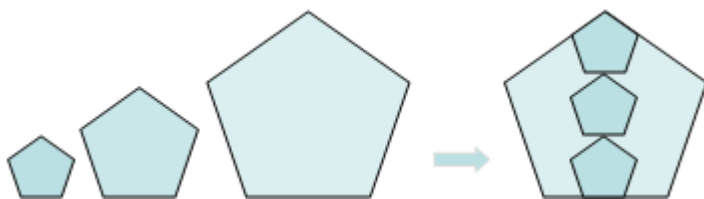
- Si dos triángulos son semejantes con razón de semejanza 2, y si los lados del pequeño miden 4 cm, 7 cm y 6 cm, los del mayor medirán 8 cm, 14 cm y 12 cm, respectivamente.
- Para trazar el triángulo pequeño a partir del grande basta con unir dos de los puntos medios de dos lados.



- Para trazar el triángulo grande a partir del pequeño se prolongan dos lados y con medida doble a partir del vértice común se unen los puntos determinados.

Figuras semejantes. Dos figuras son semejantes cuando los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a sus correspondientes en la otra.

El cociente de las longitudes de los dos segmentos correspondientes se llama razón de semejanza o escala, k .



En este caso, la razón de semejanza entre el pentágono grande y el pequeño vale 3.

En las figuras semejantes los ángulos son iguales y las distancias proporcionales.

Otras aplicaciones de la semejanza (del teorema de Tales)

División de un segmento en partes iguales

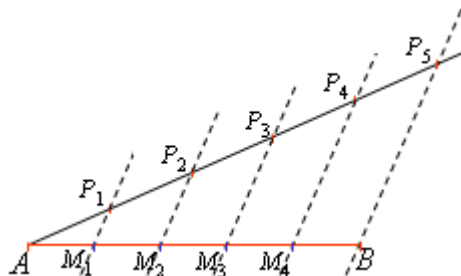
Ejemplo: Para dividir un segmento AB en 5 partes iguales se procede como sigue:

1. Se traza una semirrecta que parta de A , y sobre ella se marcan 5 segmentos (consecutivos) de la misma longitud (eso puede hacerse con ayuda de un compás). Sean P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 los extremos de esos segmentos.

2. Se une el extremo del quinto segmento (P_5) con el punto B .

3. Se trazan rectas paralelas a la recta P_5B por los puntos de división P_1, P_2, P_3 y P_4 .

4. Los puntos M_1, M_2, M_3 y M_4 obtenidos sobre el segmento AB lo dividen en 5 partes iguales. (Debe ser evidente que si los segmentos AP_1, AP_2, \dots son iguales también lo serán AM_1, AM_2, \dots



Medida de la altura de un objeto vertical por su sombra

Ejemplo: Para medir la altura de un edificio, de un árbol, de una torre..., en un día de sol, puede procederse como sigue:

1. Se coge otro objeto de medida conocida, pongamos de 1,5 metros, y se mide la longitud de su sombra: 0,8 m, por ejemplo.

2. Se mide la longitud de la sombra del edificio, del árbol...; supongamos que la sombra del edificio mide 22 m, y la del árbol 4,8 m.

3. Aplicando Tales se tendrá:

$$\frac{1,5}{0,8} = \frac{x}{22} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 22}{0,8} = 41,25 \text{ m.}$$

Igualmente:

$$\frac{1,5}{0,8} = \frac{y}{4,8} \Rightarrow y = \frac{1,5 \cdot 4,8}{0,8} = 9 \text{ m.}$$

