

Tema 3. Potencias y raíces (II)**Resumen**

Raíz cuadrada: $\sqrt{a} = b, a > 0 \Leftrightarrow b^2 = a$. Raíz cúbica: $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$.

Ejemplos: a) $\sqrt{49} = 7$, pues $7^2 = 49$; también $\sqrt{49} = -7$, pues igualmente $(-7)^2 = 49$.

b) $\sqrt[3]{8} = 2$, pues $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, pues $(-2)^3 = -8$.

Raíz de índice n (raíz n -ésima). Se dice que la raíz n -ésima de un número a , y se escribe $\sqrt[n]{a}$, es b , si $b^n = a$. Esto es, $\sqrt[n]{a} = b, n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow b^n = a$.

Al número a se llama radicando, a n índice y al conjunto $\sqrt[n]{a}$ radical.

Ejemplos: a) $\sqrt[5]{32} = 2$, pues $2^5 = 32$. b) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$, pues $(\pm 2)^4 = 16$.

• Las raíz de índice n puede expresarse como una potencia de exponente racional: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Notación que resulta coherente, pues aplicando la definición se tiene que $(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$.

• En particular, $a^{1/2} = \sqrt{a}$ y $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$. Ambas expresiones son consistentes, pues:

$$(a^{1/2})^2 = (\sqrt{a})^2 \Leftrightarrow a^{2 \cdot \frac{1}{2}} = a^{2/2} = a^1 = a; \text{ y } (a^{1/3})^3 = (\sqrt[3]{a})^3 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^{3/3} = a^1 = a$$

• En general, si $\frac{n}{m}$ es una fracción, se define $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$.

Ejemplos: a) $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$. b) $\sqrt[5]{3^4} = 3^{4/5}$. c) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2^{5/5} = 2^1 = 2$

Radicales equivalentes: simplificación

Dos radicales son equivalentes cuando valen lo mismo.

Ejemplos: a) $\sqrt{9}$ y $\sqrt[4]{81}$ son radicales equivalentes, pues $\sqrt{9} = \pm 3$ y $\sqrt[4]{81} = \pm 3$.

b) $\sqrt[4]{25}$ y $\sqrt{5}$ son radicales equivalentes o iguales, pues $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{2/4} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$.

• En general, para obtener un radical equivalente a otro basta con multiplicar (o dividir) el índice y el exponente del radicando por el mismo número. Así, $\sqrt[n]{a^m}$ es equivalente a $\sqrt[pn]{a^{pm}}$,

$$\text{ya que } \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = a^{\frac{p \cdot m}{p \cdot n}} = \sqrt[pn]{a^{pm}}.$$

Este proceso realizado de derecha a izquierda nos permite simplificar radicales.

Ejemplo: Los siguientes radicales son iguales: $\sqrt[12]{3^6} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$. El más simple es el último.

Operaciones con radicales

En general las operaciones con radicales no pueden realizarse, salvo con calculadora.

Ejemplos: a) Las siguientes operaciones no pueden hacerse: 1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; 2) $3 - \sqrt{5}$.

b) Las siguientes operaciones pueden simplificarse como sigue:

$$1) 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \quad 2) \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5 \quad 3) (15\sqrt{3}) : (5\sqrt{3}) = (15 : 5) = 3$$

Para operar con radicales hay que tener en cuenta las siguientes propiedades básicas:

Producto de radicales: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

En particular, para raíces cuadradas: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Ejemplos:

a) $\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{81} = 6 \cdot 9 = 54$. La primera raíz se ha calculado con cierta facilidad.

- b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9$. El producto de raíces ha podido realizarse.
 b) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. En este caso se ha extraído el factor 6 de la raíz.

Potencia de un radical: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$. En particular: $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Ejemplos:

- a) $\sqrt{7^2} = 7$; $(\sqrt{11})^2 = 11$; $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = 3^{4/2} = 3^2 = 9$.
 b) $(\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$; $(\sqrt[3]{5})^3 = \sqrt[3]{5^3} = 5^{3/3} = 5$.

Cociente de radicales: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. En particular, para raíces cuadradas: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

- Ejemplos:** a) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{50}{10}} = \sqrt{5}$. b) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$.

En ambos casos se ha conseguido un resultado simple.

La suma y resta de radicales sólo puede “hacerse” cuando son radicales semejantes. Alguna vez los radicales pueden hacerse semejantes, extrayendo o introduciendo factores en la raíz. Para raíces cuadradas, la introducción o extracción de factores se hace como sigue:

- Introducción: $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$. Para introducir un factor se eleva al cuadrado.

- Ejemplos:** a) $2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$. b) $4 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{80}$.

- Extracción: Si $N = A \cdot b$, entonces $\sqrt{N} = \sqrt{A \cdot b} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b}$, supuesto que $\sqrt{A} = a$.

- Ejemplos:** a) $\sqrt{500} = \sqrt{100 \cdot 5} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{5} = 10 \cdot \sqrt{5}$. b) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

- Para sumar o restar radicales deben ser equivalentes (los que tienen el mismo índice y el mismo radicando).

Ejemplos:

- a) $8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (8 - 3 + 2) \cdot \sqrt{5}$. Ha bastado con sumar (sacando factor común).
 b) La operación $8\sqrt{2} + 3\sqrt{32} - \sqrt{98}$ no puede hacerse inicialmente; pero operando dentro de los radicales pueden extraerse factores y hacer que los radicales sean semejantes, para después sumar o restar. Así:

$$8\sqrt{2} + 3\sqrt{32} - \sqrt{98} = 8\sqrt{2} + 3\sqrt{16 \cdot 2} - \sqrt{49 \cdot 2} = 8\sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 8\sqrt{2} + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} - 7 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = (8 + 12 - 7) \cdot \sqrt{2} = 13\sqrt{2}.$$

Operaciones combinadas

Para realizar operaciones combinadas hay que tener en cuenta tanto las propiedades de los radicales como las de las operaciones ordinarias, cuidando los signos y la prioridad de las operaciones.

Ejemplos:

- a) $3(2 - \sqrt{5}) = 3 \cdot 2 - 3 \cdot \sqrt{5} = 6 - 3\sqrt{5}$.
 b) $(\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{2} + 5) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 5 = 2\sqrt{6} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 5$.
 c) $(3\sqrt{2} - 2)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 + 2^2 = 9 \cdot 2 - 12\sqrt{2} + 4 = 22 - 12\sqrt{2}$.
 d) $(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6}) = 3^2 - (\sqrt{6})^2 = 9 - 6 = 3$.