

Tema 4. Operaciones con polinomios (II)**Resumen**Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se suman o restan los términos semejantes, manteniéndose los términos no semejantes.

Ejemplos: Para los polinomios: $4x^3 + 5x - 6$ y $3x^3 - 2x^2 + 7x$:

$$\text{a) } (4x^3 + 5x - 6) + (3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^3 + 3x^3) - 2x^2 + (5x + 7x) - 6 = 7x^3 - 2x^2 + 12x - 6.$$

$$\text{b) } (4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) = (4x^3 - 3x^3) - (-2x^2) + (5x - 7x) - 6 = x^3 + 2x^2 - 2x - 6.$$

Observación: Es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multipliación de un polinomio por un monomio

Se multiplica cada término del polinomio por el monomio; para ello se utiliza la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación.

Ejemplo: $4x^2 \cdot (3x^3 - 2x + 7) = (4x^2 \cdot 3x^3) + (4x^2 \cdot (-2x)) + (4x^2 \cdot 7) = 12x^5 - 8x^3 + 28x^2.$

Observación: Es imprescindible tener en cuenta las reglas de los signos.

Multipliación de dos polinomios

Se multiplica cada término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo: “todos por todos”. Esto es, se aplica la propiedad distributiva del producto y las reglas de la potenciación. Una vez realizados los productos deben agruparse los términos semejantes.

Ejemplos: a) $(5x - 6)(2x^2 - 3x + 1) = (5x)(2x^2 - 3x + 1) - 6(2x^2 - 3x + 1) =$
 $= (5x \cdot 2x^2) + (5x \cdot (-3x)) + (5x \cdot 1) - (6 \cdot 2x^2) - (6 \cdot (-3x)) - (6 \cdot 1) =$
 $= 10x^3 - 15x^2 + 5x - 12x^2 + 18x - 6 = 10x^3 - 27x^2 + 23x - 6$

b) $(4x^3 + 5x - 6)(-2x^2 + 7x) =$
 $= (4x^3 \cdot (-2x^2)) + (4x^3 \cdot 7x) + (5x \cdot (-2x^2)) + (5x \cdot 7x) - (6 \cdot (-2x^2)) - (6 \cdot 7x) =$
 $= -8x^5 + 28x^4 - 10x^3 + 35x^2 + 12x^2 - 42x = -8x^5 + 28x^4 - 10x^3 + 47x^2 - 42x$

Observación: Hay que observar las reglas de los signos, tanto al multiplicar como al agrupar.

Productos notables: $(a+b)^2$ $(a-b)^2$ $(a+b)(a-b)$

En todos los casos, multiplicando como dos polinomios se tendrá:

• $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

• $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

• $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$

Se tiene: $\underline{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\underline{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ $\underline{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Ejemplos: a) $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25.$

b) $(x^2 + 3)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 = x^4 + 6x^2 + 9.$

c) $(4x - 1)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1.$

d) $(5 - 2x^2)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2x^2 + (2x^2)^2 = 25 - 20x^2 + 4x^4.$

e) $(4x+3)(4x-3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9.$

f) $(2+x^2)(2-x^2) = 2^2 - (x^2)^2 = 4 - x^4.$

Operaciones con fracciones algebraicas

Las fracciones algebraicas son de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$; aquellas en las que el numerador y el

denominador son polinomios.

Se operan del mismo modo que las fracciones ordinarias.

Recuerda: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$ y $\frac{a}{b} \pm c = \frac{a \pm cb}{b}$. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ y $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

(Hay que observar que son frecuentes los errores de signos y los errores en el (no) empleo de paréntesis; por tanto, debe procederse con cuidado.)

Equivalencia:

Con fracciones ordinarias: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. Para obtener fracciones equivalentes se multiplica o divide el numerador y el denominador por un mismo número distinto de 0.

Con fracciones algebraicas: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x) \cdot D(x) = B(x) \cdot C(x)$. Para obtener fracciones

equivalentes se multiplica o divide el numerador y el denominador por una misma expresión algebraica no nula. Esta propiedad permite simplificar fracciones algebraicas.

Ejemplo: a) Las fracciones algebraicas $\frac{x}{x+2}$ y $\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$ son equivalentes. En la

segunda se han multiplicado el numerador y el denominador por la expresión $x-1$.

b) La fracción algebraica $\frac{6x^2+9}{3x}$ puede simplificarse como sigue:

$$\frac{6x^2+9}{3x} = \frac{3(2x^2+3)}{3x} = \frac{2x^2+3}{x} \rightarrow \text{Se ha dividido numerador y denominador por 3.}$$

Suma de fracciones algebraicas

$$\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot D(x) \pm C(x) \cdot B(x)}{B(x) \cdot D(x)}; \quad \frac{A(x)}{B(x)} \pm C(x) = \frac{A(x) \pm C(x) \cdot B(x)}{B(x)}$$

Ejemplos: a) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{4x}{x+1} = \frac{x^2+4x}{x+1} \rightarrow$ (Las fracciones tienen el mismo denominador.)

$$b) \frac{x^2}{x+1} - \frac{2x-3}{2x} = \frac{x^2 \cdot 2x - (2x-3)(x+1)}{(x+1) \cdot 2x} = \frac{2x^3 - (2x^2 + 2x - 3x - 3)}{2x^2 + 2x} = \frac{2x^3 - 2x^2 + x + 3}{2x^2 + 2x}.$$

Recuerda que un signo $-$ delante de un paréntesis cambia los signos de todos los términos.

$$c) \frac{2x^2-4}{x-5} + 3x = \frac{2x^2-4+3x(x-5)}{x-5} = \frac{2x^2-4+3x^2-15x}{x-5} = \frac{5x^2-15x-4}{x-5}$$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot D(x)}; \quad \frac{A(x)}{B(x)} : \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot D(x)}{B(x) \cdot C(x)}$$

Ejemplos: a) $\frac{2x-2}{x^2+1} \cdot \frac{x^2}{x-1} = \frac{(2x-2)x^2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{2x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1}$

$$b) \frac{x^2-9}{2x+1} : \frac{x+3}{3-x} = \frac{(x^2-9) \cdot (3-x)}{(2x+1)(x+3)} = \frac{(x+3)(x-3)(3-x)}{(2x+1)(x+3)} = -\frac{(x-3)^2}{2x+1}$$