Tema 4 (II). Sistemas de ecuaciones — Resumen

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Su forma más simple es $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

- La solución de un sistema es el par de valores de x e y que cumple las dos ecuaciones a la vez.
- Dos sistemas son equivalentes cuando tienen la misma solución.
- Hay varios métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción.

Método de sustitución: Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra ecuación. Se obtiene así una nueva ecuación con una sola incógnita, cuya solución permite hallar la del sistema.
Método de igualación: Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando ambas incógnitas se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.
Método de reducción: Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

Discusión de un sistema
Discutir un sistema es determinar de qué tipo es, compatible o incompatible, dependiendo del valor que tomen los coeficientes de las incógnitas. Pueden clasificarse como sigue:

- compatibles determinados, si tienen una única solución;
- compatibles indeterminados, si tienen infinitas soluciones;
- incompatibles, si no tienen solución.

Ejemplo:

a) El sistema $\begin{cases} x-2y=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$ es claramente incompatible: la misma cosa, $x-2y$, no puede ser a la vez igual a 2 y a 0. Es fácil observar que al transformarlo, por ejemplo, así:

$\begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} x-2y=2 \\ 0=-2 \end{cases}$, se obtiene una igualdad falsa, que 0 = –2.

b) El sistema $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ es compatible indeterminado, como puede verse observando que la segunda ecuación es el doble de la primera

c) El sistema $\begin{cases} x-2y=m \\ x+my=0 \end{cases}$ puede clasificarse resolviéndolo en función de m. Se tendría:

$$\begin{cases} x-2y=m \\ x+my=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} x-2y=m \\ (m+2)y=-m \end{cases} \Rightarrow y=\frac{-m}{m+2} \to \ldots \to x=\frac{m^2}{m+2}$$

El resultado es válido y único siempre que $m \neq -2$ (SCD); sería absurdo cuando $m=-2$ (SCI)

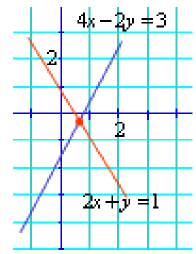
Sistemas compatibles indeterminados
Al resolver un sistema es posible que desaparezca una de las ecuaciones; por ejemplo, cuando están repetidas. En ese caso, las soluciones (que suelen ser infinitas) deben darse dependiendo de una de las incógnitas (que pasa a considerarse un parámetro), y reciben el nombre de soluciones o ecuaciones paramétricas.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -2x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ -2 \cdot E2 \end{matrix} \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ → las dos ecuaciones son idénticas. Por tanto, es equivalente al "sistema" $\{4x - 2y = 8$, cuya solución se obtiene despejando y: $\{y = -4 + 2x$. → [dando valores a x se obtienen las distintas soluciones del sistema; por ejemplo: (0, –4); (1, –2); (2, 0)…, que obviamente son puntos de una recta].

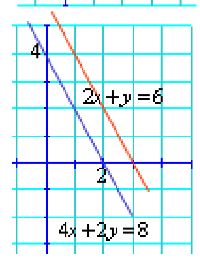
Lo normal es escribir la solución en forma paramétrica. Si se hace $x = \lambda$, (esta λ es el parámetro), se tiene: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 2\lambda \end{cases}$.

<u>Interpretación geométrica de un sistema</u>: un sistema de dos ecuaciones se puede interpretar como un par de rectas, cuya posición en el plano dependerá del tipo de sistema.



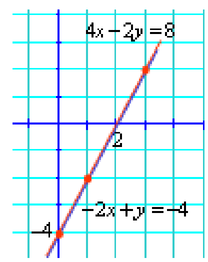
- Si las rectas se cortan, el sistema es compatible determinado; su solución es el punto de corte.
- Si las rectas son paralelas (no se cortan en ningún punto), el sistema es incompatible.
- Si las dos rectas se superponen, todos los puntos serán comunes y el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones: compatible indeterminado.

Ejemplos:



a) El sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$, cuya solución es $x = \frac{5}{8}$ e $y = -\frac{2}{8}$, puede entenderse como dos rectas que se cortan en un punto. Es un sistema compatible determinado.

b) El sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ es incompatible. Las ecuaciones que lo determinan son dos rectas paralelas.



c) El sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$, resuelto anteriormente, es compatible indeterminado. Las ecuaciones que lo determinan son dos rectas coincidentes.

<u>Sistemas no lineales</u>

Son aquellos en los que alguna de las ecuaciones que lo forman no es lineal: hay cuadrados o raíces. Aquí se considerarán sólo los sistemas con dos ecuaciones y con dos incógnitas. Por ejemplo, $\begin{cases} y = x^2 + 6 \\ x^2 + 21 = 2y \end{cases}$.

Su solución son los pares de valores (x, y) que cumplen ambas ecuaciones.

Para resolverlos, suele emplearse el método de sustitución; aunque vale cualquier otro método.

Ejemplo:

Para resolver el sistema: $\begin{cases} y = x^2 + 6 \\ x^2 + 21 = 2y \end{cases}$, puede despejarse (ya lo está) la incógnita y de la primera ecuación y sustituir en la segunda:

$$x^2 + 21 = 2\left(x^2 + 6\right) \Rightarrow x^2 + 21 = 2x^2 + 12 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Para ambos valores de x, se tiene que: $y = 9 + 6 = 15$. Las soluciones son: (–3, 15) y (3, 15).