

Tema 3. POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es un conjunto de números y letras ligados por operaciones.

Valor numérico de una expresión algebraica es el número que resulta cuando se sustituyen las letras por números.

Polinomios: operaciones con polinomios

Un polinomio de grado n , en una variable x , es una expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se agrupan, sumando o restando, los términos semejantes.

Multiplicación de polinomios

Se utiliza la propiedad distributiva del producto y las propiedades de la potenciación.

Productos notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

División de monomios

Se basa en las operaciones con fracciones y con potencias.

División de polinomios. Regla de Ruffini.

Valor numérico de un polinomio, $P(x)$, para $x = a$ es el número que se obtiene cuando se sustituye x por a . Se denota por $P(a)$. Se dice que a es una raíz de $P(x)$ cuando $P(a) = 0$.

Teorema del resto. El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$ (esto es, $P(a)$) es igual al resto de la división $P(x) : (x - a)$.

Teorema del factor. $(x - a)$ es un factor del polinomio $P(x) \Leftrightarrow x = a$ es una raíz de $P(x)$.

(Esto es, $P(a) = 0$.)

Raíces del polinomio $P(x)$ son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$. Si conocemos que x_1 , x_2 y x_3 son las raíces de $P(x)$, entonces el polinomio es de la forma

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad c \text{ es una constante.}$$

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de factores irreducibles. Para ello:

1º: Hay que buscar las raíces (utilizando los métodos de resolución de ecuaciones; o *a ojo* (por tanteo) si el polinomio es de grado mayor o igual a 3. En este caso, si hay raíces enteras son divisores del término independiente).

2º. Cuando se conozca alguna raíz, conviene dividir (por Ruffini) para obtener factores de menor grado, y, por tanto, más cómodos de manejar.

Fracciones algebraicas

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)} &= \frac{A(x) \cdot D(x) \pm C(x) \cdot B(x)}{B(x) \cdot D(x)}; & \frac{A(x)}{B(x)} \pm C(x) &= \frac{A(x) \pm C(x) \cdot B(x)}{B(x)} \\ \bullet \quad \frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} &= \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot D(x)}; & \frac{A(x)}{B(x)} : \frac{C(x)}{D(x)} &= \frac{A(x) \cdot D(x)}{B(x) \cdot C(x)} \end{aligned}$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)},$$

Expresiones algebraicas con raíces