

TEMA 4. Ecuaciones y sistemas

Ecuaciones

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones. Para ello, se ha de transformar la ecuación dada en otra equivalente a ella cuyas soluciones se obtengan de forma simple.

Las transformaciones a que habitualmente es sometida una ecuación se basan en las reglas:

1. Si se suman a los dos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica, las soluciones de la ecuación no varían.
2. Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un número distinto de 0, la ecuación resultante es equivalente a la dada.
3. Si $A(x) \cdot B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0$ o $B(x) = 0$.

Ecuaciones de primer grado: son de la forma $ax + b = 0$. También se llaman lineales.

Se resuelve así: $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Aplicaciones: Resolución de problemas de edades, de proporciones y de mezclas.

Ecuaciones de segundo grado: su forma más simple es: $ax^2 + bx + c = 0$.

Sus soluciones son: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Pueden tener dos, una o ninguna solución.

Casos particulares: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$. No siempre tiene solución.

$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$.

Interpretación geométrica de las soluciones: la función $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola; los puntos de corte de dicha parábola con el eje de abscisas son las soluciones de $x^2 + bx + c = 0$.

Ecuaciones bicuadradas: Son ecuaciones de grado cuatro, de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Haciendo $x^2 = t$ queda $at^2 + bt + c = 0$

Ecuaciones irracionales: contienen al menos un término en el que la incógnita está bajo el signo radical. Se resuelven aislando la raíz. Suelen dar lugar a una ecuación de segundo grado. Hay que comprobar las soluciones halladas.

Ecuaciones de grado superior a dos: son del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, $n \geq 3$.

Para resolverlas hay que descomponer el polinomio asociado en factores, si se puede. Debe recordarse que si la ecuación tiene soluciones enteras serán divisores del término independiente.

Ecuaciones racionales. Son de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = k$. Se resuelven eliminando denominadores y

pasando a una ecuación que responda a alguno de los tipos estudiados con anterioridad. Hay que comprobar que las soluciones obtenidas son válidas.

Sistemas de ecuaciones

Resolver un sistema es hallar los valores de las incógnitas que satisfagan todas las ecuaciones. Para ello, se han de transformar las ecuaciones que lo componen con objeto de que dichas soluciones se obtengan de manera inmediata, despejando.

Las transformaciones recomendadas son:

1. Multiplicar todos los términos de una ecuación por un número.
2. Sumar o restar a una ecuación otra ecuación, buscando que se elimine alguna de sus incógnitas.
3. Cuando se conozca el valor de una incógnita sustituir su valor en las ecuaciones restantes.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Su forma más simple es
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Hay varios métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción.

Discusión de un sistema

Discutir un sistema es determinar de qué tipo es, compatible o incompatible, dependiendo del valor que tomen los coeficientes de las incógnitas.

Pueden ser:

- compatibles determinados, si tienen una única solución;
- compatibles indeterminados, si tienen infinitas soluciones;
- incompatibles, si no tienen solución.

Interpretación geométrica de un sistema: un sistema de dos ecuaciones se puede interpretar como un par de rectas, cuya posición en el plano dependerá del tipo de sistema.

- Si las rectas se cortan, el sistema es compatible determinado; su solución es el punto de corte.
- Si las rectas son paralelas (no se cortan en ningún punto), el sistema es incompatible.
- Si las dos rectas se superponen, todos los puntos serán comunes y el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones: compatible indeterminado.

Sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas. Son de la forma:
$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Solución de un sistema de este tipo será una terna de valores x_0, y_0, z_0 que satisfacen simultáneamente las tres ecuaciones.

Para resolver estos sistemas conviene emplear el método de Gauss, con el fin de dejarlo en la

forma
$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ b_1y + c_1z = d_1 \\ c_2z = d_2 \end{cases}$$
. Este sistema se resuelve fácilmente de "abajo" a "arriba".

Aplicaciones: planteamiento y resolución de problemas de sistemas.

Sistemas no lineales. En ellos, alguna de las ecuaciones que lo forman no es lineal. Suelen resolverse empleando el método de sustitución.