Tema 7. FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES **Resumen**
Aplicaciones. Interpolación y funciones de oferta y demanda

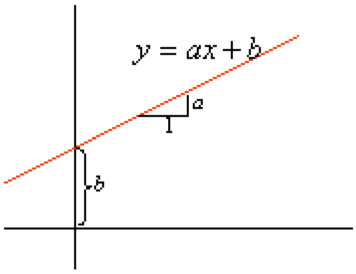
Funciones polinómicas. La expresión general de una función polinómica es

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Es la misma que la de un polinomio. Los números a_i son los coeficientes y n indica el grado, que debe ser un número entero positivo. La indeterminada x es la variable independiente. Su dominio es **R**; esto es, siempre están definidas. El valor de f(x) dependerá del que tome x.

- La función polinómica de grado cero, $f(x) = a_0$ o $y = k$, es la función constante. Se representa mediante una recta horizontal.
- La función lineal es la de grado uno. Su expresión es:

$$f(x) = ax + b \Leftrightarrow y = ax + b$$



Su representación gráfica es una recta. Para trazarla basta con conocer dos de sus puntos.
El coeficiente a se llama pendiente, y mide lo que varía la y por cada aumento unitario de x.
Al número b se le llama ordenada en el origen, pues indica el valor de y cuando x vale 0.

Recta que pasa por dos puntos
Una recta queda determinada por dos puntos. Si los puntos son $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, al ser de la recta $y = ax + b$, deberán cumplir su ecuación. Luego:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

La solución de este sistema nos proporciona los valores de a y b.

Rectas que pasan por el origen. Su expresión general es: $y = ax$.
Estas funciones se llaman de proporcionalidad directa: el coeficiente a indica la razón de proporcionalidad entre las variables x e y.
Si $a = 1$, la función se llama identidad: $y = x$.

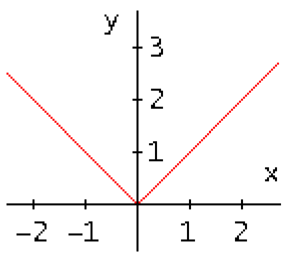
Rectas horizontales y verticales
- La expresión general de una recta horizontal es $y = b$. Recibe el nombre de función constante.
- La ecuación de una recta vertical es de la forma $x = k$.

Esta expresión no define una función: al valor $x = k$ le corresponden infinitos valores de y.

- La ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es la ecuación general de una recta, en su forma implícita.

- La función valor absoluto de x se escribe así:

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow y = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

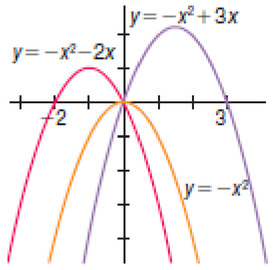


- La parte entera de x, que escribimos $f(x) = ENT[x]$, es la función que asigna a cada número real x el número entero menor o igual que x. Es una función escalonada.

La función cuadrática: parábolas.
Su expresión analítica es: $f(x) = ax^2 + bx + c \iff y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$
La gráfica de esta función es una parábola de eje vertical.

Efecto de los parámetros *a*, *b* y *c*
La parábola $y = ax^2 + bx + c$ queda totalmente definida cuando se conocen *a*, *b* y *c*.
Coeficiente *a*:

- Si $a > 0$ la parábola es cóncava ($\cup$). Su vértice está en el mínimo de la función.
- Si $a < 0$, es convexa ($\cap$). El vértice es el máximo.
- La abscisa del vértice es $x = -\dfrac{b}{2a}$; su ordenada, el valor de *y* correspondiente.



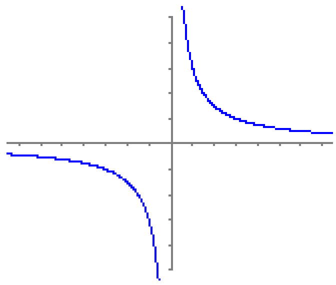
Coeficiente *b*. El coeficiente *b* produce un desplazamiento lateral en la parábola.
Término independiente *c*. El término *c* produce desplazamientos verticales en la parábola.

Funciones racionales. Son de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

- Su dominio de definición son todos los números reales, salvo aquellos que anulan el denominador. Luego no están definidas en los números que son solución de $Q(x) = 0$.

Tienen asíntotas: verticales, en las raíces del denominador que no lo sean (a la vez) del numerador; horizontales, si el grado de $Q(x)$ es mayor que el de $P(x)$; y oblicuas, cuando el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el de $Q(x)$.

Función de proporcionalidad inversa. Su expresión general es $f(x) = \dfrac{k}{x}$ o $y = \dfrac{k}{x}$, donde *k* es una constante distinta de cero.
Cuando decimos que dos magnitudes *x* e *y* son inversamente proporcionales, queremos indicar que en la misma proporción que aumenta el *y*, disminuye *x*, y viceversa. Así, si *x* se hace el doble, *y* se convierte en la mitad; por eso, su producto es constante, $yx = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.



Observa que $y = \dfrac{k}{x} \iff yx = k$.
La regla de tres simple inversa se ajusta a esta relación.
La representación gráfica de esta función es una hipérbola equilátera. Los ejes de coordenadas son asíntotas de esta curva.

Funciones radicales. Son de la forma $y = \sqrt[n]{f(x)}$, siendo *f*(x) cualquier otra función.

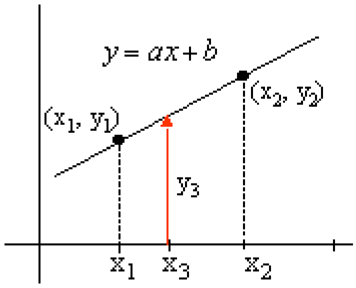
- Dominio: Estas funciones están definidas cuando está definida *f*(*x*) y además puede hacerse la raíz. Así, si *n* es par (caso de raíces cuadradas: $y = \sqrt{f(x)}$), será necesario que $f(x) \geq 0$; si *n* es impar, basta con que *f*(*x*) esté definida.

Función de interpolación. Interpolación lineal y cuadrática

Se llama <u>función de interpolación</u> a la función que se ajusta a una serie de puntos dados.

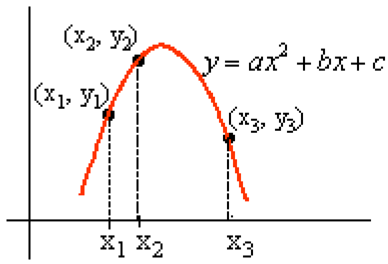
<u>Interpolación lineal</u>. Cuando se conocen sólo dos puntos, el polinomio interpolador es la función $f(x) = ax + b$, que es una recta. Para determinarla hay que hallar *a* y *b*.
Si los puntos son *P*(x1, y1) y *Q*(x2, y2), los valores de *a* y *b* se hallan resolviendo el sistema: $\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$

El valor de interpolación correspondiente a x_3 se calcula sustituyendo en ecuación hallada, siendo $y_3 = ax_3 + b$.



<u>Interpolación cuadrática</u>
Cuando se conocen tres pares de puntos no alineados, el polinomio interpolador es la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, que es una parábola.
Si los puntos son *P*(x1, y1), *Q*(x2, y2) y *R*(x3, y3), los valores de *a*, *b* y *c* se hallan resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}.$$



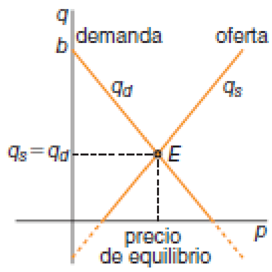
Una aplicación a la economía: Funciones de oferta y demanda

- La <u>función de demanda</u>, q_d, para un producto es aquella que determina la cantidad total que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio *p*
- La <u>función de oferta</u>, q_s, es la que determina la cantidad total que los fabricantes están dispuestos a producir a un precio de venta *p*.
- <u>Cantidad de equilibrio</u> es el número de unidades que hay que producir para que la demanda y la oferta se igualen: que se venda todo lo producido. Esto es, cuando $q_d = q_s$. El valor de *p* correspondiente se llama precio de equilibrio.

<u>Modelos de oferta y demanda. Modelo lineal</u>

- La demanda viene dada por la recta $q_d = b - ap$, con *a* y *b* > 0; (la pendiente negativa indica que cuando el precio p aumenta las ventas disminuyen).
- La oferta se expresa por $q_s = c + dp$, con *d* > 0, para indicar que si el precio aumenta la producción también lo hace. El término *c* suele ser negativo.

En los dos casos la variable independiente es *p*, y su dominio está definido para valores de *p* > 0 que hagan a q_s y q_d positivas y enteras (en la práctica no pueden venderse trozos de un producto).



<u>Modelo cuadrático</u>. La demanda se ajusta a la función $q_d = -ap^2 + bp + c$, con $a > 0$.

La oferta puede ajustarse por otra función cuadrática, $q_s = a'p^2 + b'p + c'$ con $a' > 0$.

La primera parábola tiene el vértice en el máximo; la segunda, en el mínimo.
Como en el modelo lineal, *p*, q_s y q_d deben ser positivos.

- También pueden darse <u>modelos mixtos</u>: con la función de oferta lineal y la de demanda cuadrática; o viceversa.