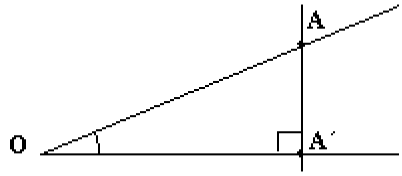
TEMA 7. TRIGONOMETRÍA



Razones trigonométricas de un ángulo

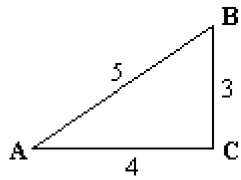
Dado un ángulo cualquiera, si desde un punto de un lado se traza su proyección sobre el otro lado se obtiene un triángulo rectángulo. Esto permite definir:

$$\text{sen}\,\hat{O} = \frac{AA´}{OA} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}; \qquad \cos\hat{O} = \frac{OA´}{OA} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}};$$

$$\text{tag}\,\hat{O} = \frac{AA´}{OA´} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

- El ángulo O puede medirse en grados o en radianes. (Un radian es un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que ha sido trazado). La relación entre ambas unidades es 360º = 2π radianes → La circunferencia completa abarca 2π radianes. Las calculadoras disponen de las teclas DEG y RAD, para grados y radianes, respectivamente.

Ejemplos: Para el triángulo adjunto se tiene:



$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \cos\hat{A} = \frac{4}{5} = 0{,}8; \quad \text{tag}\,\hat{A} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Otras razones trigonométricas:

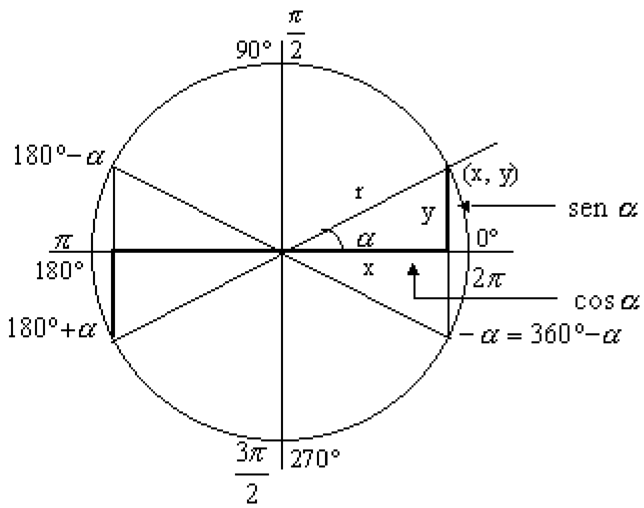
Cosecante: $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$. Secante: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Cotangente: $\text{cotag}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tag}\,\alpha}$

Razones trigonométricas de 0º, 30º, 45º, 60º y 90º

- sen 0º = 0 $\quad$ sen 30º = $\frac{1}{2}$ $\quad$ sen 45 = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ sen 90º = 1
- cos 0º = 1 $\quad$ cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ cos 45 = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ cos 60º = $\frac{1}{2}$ $\quad$ cos 90º = 0

Razones trigonométricas en la circunferencia

Con ayuda de la circunferencia:



$\text{sen}\alpha = \dfrac{y}{r}$ → Si r = 1, sen α = y;

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ → Si r = 1, cos α = x

Como x < r e y < r, para cualquier ángulo α se verifica:

$$-1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1 \qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$$

Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas de un ángulo

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}; \qquad 1 + \text{tag}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Relación entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

- $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$ $\text{tag}(90^\circ - \alpha) = \text{cotag}\,\alpha$
- $\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ $\text{tag}(90^\circ + \alpha) = -\text{cotag}\,\alpha$
- $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ $\text{tag}(180^\circ - \alpha) = -\text{tag}\,\alpha$
- $\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$ $\text{tag}(180^\circ + \alpha) = \text{tag}\,\alpha$
- $\text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\text{tag}(360^\circ - \alpha) = -\text{tag}\,\alpha$

Razones trigonométricas de sumas y diferencias: ángulo doble y mitad

senos	cosenos	tangentes
$\text{sen}(\alpha+\beta) =$ $= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos(\alpha+\beta) =$ $= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\text{sen}(\alpha-\beta) =$ $= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta) =$ $= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$	$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Fórmulas de transformación

$$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \text{sen}\,A - \text{sen}\,B = 2\cos\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \cos A - \cos B = -2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$$

Ecuaciones trigonométricas. La incógnita aparece ligada a una razón trigonométrica.
Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar todos los ángulos que la satisfacen.
Algunas recetas para resolver una ecuación trigonométrica:

- Si aparecen varias razones se reducen a la misma razón.
- Pueden tener infinitas soluciones, aunque se acostumbra a indicar sólo las del primer giro.
- Conviene comprobar los resultados ya que pueden que aparezcan *soluciones extrañas*.

Ecuaciones del tipo $a\cdot\text{sen}(bx) = c$; $a\cdot\cos(bx) = c$; $a\cdot\text{tag}(bx) = c$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$

- Ecuación $a\cdot\text{sen}(bx) = c \to \text{sen}(bx) = c/a \Rightarrow bx = \text{arcsen}(c/a) \Rightarrow x = [\text{arcsen}(c/a)]/b$

Ejemplo: $2\,\text{sen}\,3x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\arcsin(1/2) \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\cdot\begin{cases}30^\circ + 360^\circ\cdot n\\ 150^\circ + 360\cdot n\end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases}10^\circ + 120^\circ\cdot n\\ 50^\circ + 120\cdot n\end{cases}$

- Ecuación $a\cdot\cos(bx) = c \to \cos(bx) = c/a \Rightarrow bx = \arccos(c/a) \Rightarrow x = [\arccos(c/a)]/b$

Ejemplo: $\sqrt{2}\cos x = 1 \Rightarrow x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \begin{cases}45^\circ + 360^\circ\cdot n\\ 315^\circ + 360\cdot n\end{cases}$

- Ecuación $a\cdot\text{tag}(bx) = c \to \text{tag}(bx) = c/a \Rightarrow bx = \text{arctag}(c/a) \Rightarrow x = [\text{arctag}(c/a)]/b$.

Ejemplo: $4\tan\dfrac{x}{2} = 5 \Rightarrow x = 2\arctan(5/4) \Rightarrow x = 2\cdot(51{,}34 + 180^\circ\cdot n) \Rightarrow x = 102{,}68^\circ + 360\cdot n$

Los valores de arcsen, arccos y arctag se hallan con la calculadora: $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$.