Tema 8. FUNCIONES EXPONECIALES Y LOGARÍTMICAS Resumen

La función exponencial es de la forma $f(x)=a^x \Leftrightarrow y=a^x$, $a>0$ y $a\neq 1$.

- Caso particular: La exponencial de base *e*: $f(x)=e^x$.

Observación: Para trabajar correctamente con las funciones exponenciales y logarítmicas necesitas manejar bien las propiedades de la potenciación.

Algunas de ellas son: $a^1=a$; $a^0=1$; $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$; $-a^n$ no es igual a $(-a)^n$

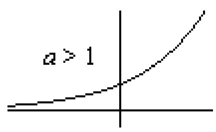
Ejemplo: $f(x)=2^x$ es la exponencial de base 2. Algunos valores son:

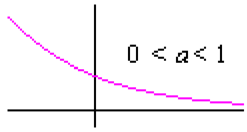
$f(1)=2^1=2$; $f(5)=2^5=32$; $f(-3)=2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$; $f(2{,}3)=2^{2{,}3}=4{,}924577653$

Características fundamentales de la función exponencial $f(x)=a^x$

- Dominio: Dom(*f*) = **R**.
- Su valor siempre es positivo: $f(x)=a^x>0$, para todo *x*.
- Corta al eje *OY* en el punto *y* = 1, pues $f(0)=a^0=1$.
- Crecimiento y decrecimiento:

Si la base *a* > 1, la función siempre es creciente.
Si la base 0 < *a* < 1, la función es decreciente.





- El eje *OX*, la recta *y* = 0, es una asíntota horizontal.

Nota: La función general $f(x)=ka^{g(x)}$ está definida siempre que lo esté *g*(*x*).

Logaritmos. Definición: $\log_a x=b \Leftrightarrow a^b=x$, con $a\neq 1$.

Las bases usuales son *a* =10 y *a* = *e*. En la calculadora, teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$

- El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido.

Propiedades de los logaritmos

$$\log_a(A\cdot B)=\log_a A+\log_a B \qquad \log_a A^n=n\log_a A \qquad \log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$$

$$\log_a a=1,\ \text{pues } a^1=a \qquad \log_a 1=0,\ \text{pues } a^0=1$$

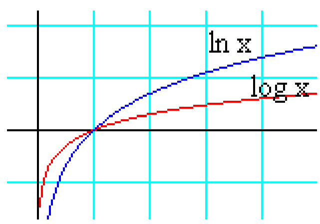
Ejemplo: a) log 5 + log 20 = log (5 · 20) = log 100 = 2.

b) $\log 5^7=7\cdot\log 5$; $\log 3^x=x\cdot\log 3$. c) $\log\dfrac{1}{20}=\log 1-\log 20=-\log 20$.

La función logarítmica

La más sencilla es $f(x)=\log_a x \Leftrightarrow y=\log_a x$ (*a* > 0; *a* ≠ 1).

Para las bases usuales, *a* = 10 y *a* = *e*: $f(x)=\log x$ y $f(x)=\ln x$.



Propiedades fundamentales:

- Dominio: $\mathbf{R}^+ \to x>0$. Recorrido: $(-\infty,+\infty)$.
- El eje *OY*, la recta *x* = 0, es asíntota vertical de su curva.

Si *a* > 1 (que es lo usual), la función es creciente.
Si 0 < *a* < 1, la función será decreciente.

Nota: La función general $f(x)=\log_a g(x)$ está definida siempre que *g*(*x*) > 0.

Ejemplo: $y=\log(x-5)$ está definida para *x* > 5; e $y=\log(1+x^2)$ está definida siempre.

- Las funciones exponencial y logarítmica son inversas; esto es: $\log_a a^x=x$ y $a^{\log_a x}=x$.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Casos inmediatos:

- Ecuación $a^x = b$, $a > 0$ y $b > 0$. Se resuelven aplicando logaritmos.

Ejemplo:

$$2^x = 15 \Rightarrow \log 2^x = \log 15 \Rightarrow x \log 2 = \log 15 \Rightarrow x = \frac{\log 15}{\log 2} = \frac{1{,}176...}{0{,}301...} = 3{,}90689...$$

- Ecuación $a^b = x$. (Si a es negativo puede que esta expresión no tenga sentido)

Es un ejercicio común de potenciación. Puede resolverse con la calculadora.

Ejemplo: $4^{3,2} = x$. Con la calculadora se obtiene $x = 84{,}4885$.

- Ecuación $x^a = b$, $b > 0$. Puede resolverse aplicando logaritmos (antilogaritmos).

Ejemplo:

$x^4 = 15 \to$ Aplicando logaritmos: $x^4 = 15 \Rightarrow \log x^4 = \log 15 \Rightarrow 4 \log x = \log 15 \Rightarrow$

$\log x = \frac{\log 15}{4} = \frac{1{,}176091259}{4} = 0{,}294022814 \Rightarrow x = \text{antilog } 0{,}29022814 = 1{,}967989671$

Para calcular antilogaritmo, pulsar: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\log}$ 0,29022814

- Ecuación $\log_a x = b$ Se resuelve empleando la definición de logaritmo y la potenciación.

Ejemplo: $\log x = 3{,}5 \Rightarrow x = 10^{3,5} \Rightarrow x = 3162{,}27766$.

- Ecuación $\log_a b = x$. Puede resolverse aplicando logaritmos o la fórmula del cambio de base: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$. Si las bases son 10 o e se resuelven directamente con la calculadora; en cualquier otro caso hay que aplicar la definición de logaritmo.

Ejemplo:

$$\log_4 50 = x \Rightarrow 4^x = 50 \Rightarrow \log 4^x = \log 50 \Rightarrow x \log 4 = \log 50 \Rightarrow x = \frac{\log 50}{\log 4} = 2{,}82$$

- Ecuación $\log_x a = b$. Se resuelve aplicando la definición de logaritmo.

Ejemplo: $\log_x 1000 = 5 \Rightarrow x^5 = 1000 \Rightarrow x = 1000^{1/5} = 3{,}98107$.

Otras ecuaciones logarítmicas y exponenciales

En algunos casos se resuelven aplicando las propiedades de los logaritmos, haciendo un cambio del tipo $a^x = t$, sacando factor común o aplicando alguna otra propiedad algebraica.

Ejemplos:

a) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} = 9 \Rightarrow 3^{x-1} \cdot (3-2) = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 9 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$.

b) $\log(x+4) + \log(x-1) = \log(x^2+5) \Rightarrow \log[(x+4) \cdot (x-1)] = \log(x^2+5) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+4) \cdot (x-1) = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = x^2 + 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$.