Números complejos (Pendientes Matemáticas I)

1. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a) 2 + 3i b) –1 + i c) –2 –2i d) 4 – 3i

[Sol] a) – 2 – 3i, 2 – 3i; b) 1 – i, – 1 – i; c) 2 + 2i, - 2 + 2i; d) – 4 + 3i, 4 + 3i.

2. Completa la tabla:

z	–z	$\bar{z}$	1/z
2 – 3i			
	–1 + 4i		
		3 – 3i	
			i

[Sol] 1ª fila, -2+3i, 2+3i, $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$; 2ª fila, 1-4i, 1+4i, $\frac{1}{17}+\frac{4}{17}i$; 3ª fila, 3+3i, -3-3i, $\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$; 4ª fila, -i, i, i.

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(-\frac{5}{3}-i\right)+\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ b) $\left(-\frac{1}{4}-6i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}i\right)$ c) $(2-i)\cdot\left(\frac{5}{2}+3i\right)$

d) $(3-i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ e) $(-2i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ f) (3 – 2i)·(3 + 2i)

[Sol] a) $-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i$; b) $1-\frac{15}{2}i$; c) $8+\frac{7}{2}i$; d) $\frac{9}{2}+\frac{7}{2}i$; e) $3-2i$; f) 13

4. Calcula: a) $i^{10} + i^{141} + i^{15}$ b) $(3-2i)^2$ c) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)^2$ d) $(-1 + 2i)^6$

[Sol] a) –1; b) 5 – 12i; c) $-\frac{5}{4}+3i$; d) 117 – 44i.

5. Dados $z_1 = 3 – 2i$, $z_2 = –3 + i$ y $z_3 = 5i$, calcula:

a) $z_1+z_2+z_3$ b) $z_1+2z_2-z_3$ c) $z_1(z_2+z_3)+z_3$

d) $\frac{z_2-z_1}{z_3}$ e) $(z_1+2z_3)(z_2-z_1)$

[Sol] a) 4i; b) $-3-5i$; c) $3+29i$; d) $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$; e) $-42-39i$.

6. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$ b) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^5$ c) $\frac{2}{3-i}$ d) $\frac{1+i}{1-i}$

[Sol] a) 1; b) $-512\sqrt{3}-512i$; c) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$; d) i.

7. (PAU) a) ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo, $z=a+bi$, y el opuesto del conjugado del mismo número? Razone la respuesta.

b) Calcule los números *x* e *y* de modo que $\frac{3-xi}{1+2i}=y+2i$.

[Sol] a) son iguales; b) x = -16, y = 7.

8. Calcula en cada caso el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación correspondiente sea un número imaginario puro:

a) $(2-3i)(1+ki)$ b) $(k+\sqrt{2}i)^2$ c) $\frac{k-2i}{8+2i}$

[Sol] a) $k=-\frac{2}{3}$; b) $k=\pm\sqrt{2}$; c) $k=\frac{1}{2}$.

9. Calcula en cada caso el valor que ha de tener *k* para que el resultado de la operación correspondiente sea un número real:

a) $(3+ki)(6-3i)$ b) $\frac{k-2i}{5-6i}$ c) $\frac{1+i}{k+2i}$

[Sol] a) $k=\frac{3}{2}$; b) $k=\frac{5}{3}$; c) $k=2$.

10. Expresa en forma binómica:

a) 2(cos 135º + i sen 135º) · 3(cos 45º + i sen 45º) b) [2 (cos 30º + i sen 30º)]^5

c) $\dfrac{4(\cos 240^{\circ}+i\,sen\;240^{\circ})}{\frac{1}{2}(\cos 30^{\circ}+i\,sen\;30^{\circ})}$ d) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,sen\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,sen\frac{\pi}{3}\right)$

[Sol] a) -6; b) $-16\sqrt{3}+16i$; c) $-4\sqrt{3}-4i$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$

11. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma binómica:

a) $2_{210^{\circ}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)_{60^{\circ}}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)_{150^{\circ}}:3_{30^{\circ}}$ c) $\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{3}}\cdot 2_{\frac{4\pi}{3}}$

[Sol] a) $-\frac{1}{2}i$; b) $-\frac{1}{18}+\frac{\sqrt{3}}{18}i$; c) $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

12. Si z = $4_{60^{\circ}}$ y z´ = $2_{45^{\circ}}$ calcula:

a) z + z´ b) z · z´ c) $\frac{z}{z'}$ d) $z^2 \cdot z'$ e) $z^2\cdot\overline{z'}$ f) (-z) · z´

[Sol] a) $(2+\sqrt{2})+(2\sqrt{3}+\sqrt{2})i$; b) $8_{105^{\circ}}$; c) $2_{15^{\circ}}$; d) $32_{165^{\circ}}$; e) 32_{75}; f) $8_{285^{\circ}}$

13. Encuentra la ecuación que tiene por raíces:

a) 2 - *i* y 2 + *i* b) 2, –3, *i* y –*i*

[Sol] a) $z^2 - 4z + 5 = 0$; b) $z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6 = 0$.

14. Halla las soluciones, reales o complejas, de las ecuaciones:

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ b) $z^4 - 256 = 0$ c) $z^4+\left(1-\sqrt{3}i\right)=0$.

[Sol] a) 1 + 2i, 1 – 2i; b) 4, -4, 4i, -4i; c) $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{30^{\circ}}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{120^{\circ}}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{210^{\circ}}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{300^{\circ}}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^5-1 = 0$ b) $z^3 + 8 = 0$

[Sol] a) $1_{0^{\circ}}$; $1_{72^{\circ}}$; $1_{144^{\circ}}$; $1_{216^{\circ}}$ y $1_{288^{\circ}}$; b) $2_{60^{\circ}}$; $2_{180^{\circ}}$ y $2_{300^{\circ}}$;