Tema 9. SUCESIONES Y PROGRESIONES **Resumen**

Una sucesión es un conjunto de números dispuestos ordenadamente. A cada uno de los números se le llama término. Suelen designarse por a_1, a_2, a_3, ..., a_n.
Ejemplos:
a) 4, 7, 10, 13,... → $a_1 = 4$, ..., $a_4 = 13$.
b) 2, 3, 5, 7, 11, 13,... es la sucesión de los números primos.

Término general de una sucesión
Es una fórmula que permite obtener el valor de cualquier término en función de la posición que ocupa. En esa fórmula la variable suele ser n, tomando los valores 1, 2, 3,…

Ejemplo: La expresión $a_n = 3n + 1$ es el término general de la sucesión 4, 7, 10, 13,.... Dando valores a n se obtienen los distintos términos; así, por ejemplo, $a_{25} = 3 \cdot 25 - 1 = 74$.

Tipos de sucesiones

- Una sucesión es creciente si cada término es mayor o igual que el anterior: $a_n \le a_{n+1}$. Esto es, cuando $a_{n+1} - a_n \ge 0$. **Ejemplo**: La sucesión 1; 1,2; 1,3; 1,4;… es (estrictamente) creciente.

- Una sucesión es decreciente si cada término es menor que el anterior: $a_n \ge a_{n+1}$. Esto es, cuando $a_{n+1} - a_n \le 0$. **Ejemplo**: La sucesión 1; 1/2; 1/3; 1/4,… es estrictamente decreciente

- Una sucesión es constante si tiene todos sus términos iguales: $a_n = k$, para todo n.

- Una sucesión está acotada superiormente si existe una constante k, tal que $a_n \le k$, para todo n. Está acotada inferiormente si existe una constante k, tal que $k \le a_n$, para todo n.

Ejemplo: La sucesión $a_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$ es creciente y está acotada superiormente por $k = 2$.

Introducción al concepto de límite de una sucesión
La sucesión a_n tiende a a, $a_n \to a$ o $\lim(a_n) = a$, si para valores grandes de n, cuando $n \to \infty$, la diferencia $|a_n - a| \to 0$. A las sucesiones que tienen límite se las llama convergentes.

Límite de algunas sucesiones

- Las sucesiones de tipo polinómico: $a_n = P(n) \to \pm\infty$. **Ejemplo**: $\lim\left(-n^2 + 17n + 1\right) = -\infty$
- $a_n = 1/P(n) \to 0$. **Ejemplo**: $\lim \dfrac{1}{n^2 - 2n - 1} = 0$
- $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} \to 0$, si el grado $Q(n)$ > grado $P(n)$. **Ejemplo**: $\lim \dfrac{3n+10}{n^2+1} = 0$.
- $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} \to \infty$, si el grado $Q(n)$ < grado $P(n)$. **Ejemplo**: $\lim \dfrac{n^2 - 3n}{10n + 25} = \infty$.
- $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} \to \dfrac{p}{q}$, si grado $Q(n)$ = grado $P(n)$. siendo p y q los coeficientes principales de $P(n)$ y $Q(n)$, respectivamente. **Ejemplo**: $\lim \dfrac{3n^2 + 7n - 17}{2n^2 - 16n + 39} = \dfrac{3}{2}$.

Progresiones aritméticas

Una sucesión es una progresión aritmética cuando cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo, llamado diferencia de la progresión.

En general, si el primer término es a_1 y la diferencia d, la progresión aritmética es:

$$a_1 \qquad a_2 = a_1 + d \qquad a_3 = a_2 + d \qquad a_4 = a_3 + d \qquad \ldots \qquad a_n = a_{n-1} + d$$

- El término general de una progresión aritmética es: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Ejemplo:

La sucesión 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, ... es una p. a. de diferencia d = 0,5.

Término general: $a_n = 1{,}5 + (n-1)\cdot 0{,}5 \Leftrightarrow a_n = 1 + 0{,}5n \Rightarrow a_{35} = 1 + 0{,}5\cdot 35 = 18{,}5$; $a_{100} = 51$.

- La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética vale: $S = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Ejemplo:

La suma: 1 + 7 + 13 + 19 +… + a_{200}, vale: $S = \dfrac{(a_1 + a_{200})\cdot 200}{2}$.

Como a_1 = 1 y d = 6 $\Rightarrow$ a_{200} = 1 + 199 · 6 = 1195, entonces: $S = \dfrac{(1+1195)\cdot 200}{2} = 119600$.

Progresiones geométricas

Una sucesión es una progresión geométrica cuando cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, llamado razón de la progresión.

Si el primer término de una progresión geométrica es a_1 y la razón es r, la progresión será:

$$a_1 \qquad a_2 = a_1 r \qquad a_3 = a_2 r \qquad a_4 = a_3 r \qquad \ldots \qquad a_n = a_{n-1} r$$

- El término general de la progresión geométrica es: $a_n = a_1 r^{n-1}$

Ejemplo:

La sucesión 1, 2, 4, 16, 32,... es una progresión geométrica de razón r = 2.

Su término general será: $a_n = 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 2^9 = 512$.

- La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es: $S = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$
- La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, cuya razón, r, verifica

que $|r| < 1$, vale: $S = \dfrac{a_1(-1)}{r-1} = \dfrac{a_1}{1-r}$.

Ejemplo:

a) La suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 2, 4, 8, ... es

$S = \dfrac{1\cdot(2^{10} - 1)}{2-1} = 1023$.

b) La suma 100 + 50 + 25 + 12,5 + ... (infinitos términos, con r = 1/2) es: $S = \dfrac{100}{1-1/2} = 200$.