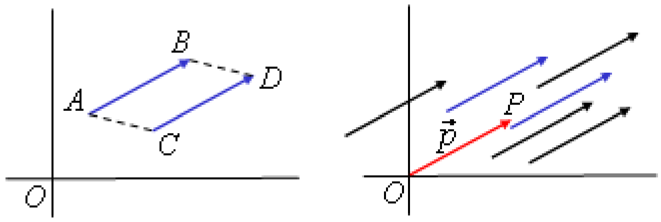
Tema 10. (I) GEOMETRIÁ ANALÍTICA: VECTORES **Resumen**

<u>Vector fijo y vector libre</u>

El vector que tiene por origen el punto A y por extremo el punto B, se llama vector fijo $\overrightarrow{AB}$.

- <u>Módulo</u> del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento AB. Se denota $|\overrightarrow{AB}|$.
- <u>Dirección</u> de $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que contiene a A y a B.
- <u>Sentido</u> de $\overrightarrow{AB}$ es el que indica el traslado de A a B.
- Dos vectores fijos son <u>equipolentes</u> si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces el polígono de vértices A, B, D y C (en ese orden) es un paralelogramo.



- Se llama <u>vector libre</u> a un vector y a todos los que son equipolentes a él; esto es, todos los que se obtienen trasladándolo (paralelamente). Entre ellos tiene especial importancia el que tiene su origen en el origen de coordenadas, en el punto O.

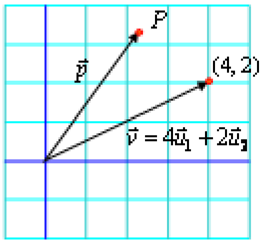
<u>Correspondencia entre puntos y vectores</u>

Entre puntos de $\mathbf{R}^2$ y vectores libres del plano existe una *biyección*:

A cada vector $\overrightarrow{AB}$, equipolente a $\overrightarrow{OP}$, se le asocia el punto P.

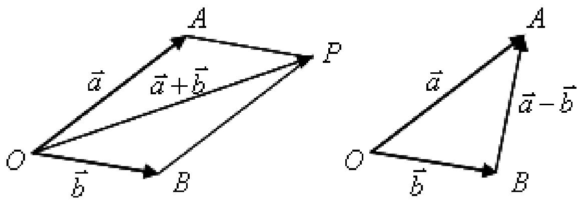
A cada punto P se le asocia el vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

Se escribe, indistintamente, $P = (a_1, a_2)$ o $\vec{p} = (a_1, a_2)$.

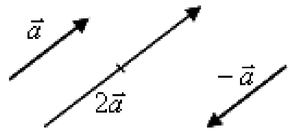


<u>Operaciones con vectores libres</u>

Interpretación geométrica de las operaciones con vectores libres



Suma y resta de vectores



Multiplicación de un vector por un número

Para obtener las coordenadas de la suma o del producto se procede como hemos hecho antes.

Esto es, si: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, entonces:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
- $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$. Si $\lambda > 0$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$; si $\lambda < 0$, sentido contrario.

Ejemplo:

Si $A = (1, -2)$ y $B = (3, -1$, se tendrá: $\vec{a} = (1, -2)$; $\vec{b} = (3, -1)$;

- $\overline{BA} = \vec{a} - \vec{b} = (1, -2) - (3, -1) = (-2, -1)$; $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -1) - (1, -2) = (2, 1)$
- $2\vec{a} = 2(1, -2) = (2, -4)$

Como $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, el vector $\dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ es unitario.

Punto medio de un segmento de extremos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$: $M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Ejemplo: Para $A(2, -1)$ y B(−1, 3) es el punto $M = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Combinación lineal de vectores. Bases
Dos vectores son linealmente dependientes si tienen la misma dirección.
Dos vectores son linealmente independientes si tienen distinta dirección.
En el plano, dos vectores no nulos y linealmente independientes (no paralelos) forman una base. La base canónica es $\{\vec{u} = (1,0), \vec{v} = (0,1)\}$.

Producto escalar de vectores. Dados dos vectores $\vec{v} = (a_1, b_1)$ y $\vec{w} = (a_2, b_2)$ se define:

- Producto escalar ordinario $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$
- Producto escalar canónico $\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2$

– Ambas definiciones son equivalentes. – El producto escalar de vectores es un número.
Ejemplo: Si $\vec{v}$ = (2, −1) y $\vec{w}$ = (4, 5), su producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$ = (2, −1) · (4, 5) = 8 − 5 = 3.

Propiedad: Si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares.

- El módulo de un vector $\vec{v} = (a_1, b_1)$, se define como: $|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}}$

Ejemplo: Si $\vec{v}$ = (2, −1) y $\vec{w}$ = (4, 5) ⇒ $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$; $|\vec{w}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

Distancia entre dos puntos
La distancia entre dos puntos *A* y *B*, *d*(*A*, *B*), es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$. Si las coordenadas de esos puntos fuesen *A* = (a_1, b_1) y *B* = (a_2, b_2), entonces

$$\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1) \Rightarrow d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

Ejemplo: Si *A* = (1, −2) y *B* = (3, −1), la distancia, $d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{5}$
Observa que coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ = (3, −1) − (1, −2) = (2, 1).

Coseno del ángulo que forman dos vectores
De la primera definición del producto escalar, se deduce que: $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$

Ejemplo: Para $\vec{v}$ = (2, −1) y $\vec{w}$ = (4, 5) : $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{41}} \Rightarrow$ ángulo $(\vec{v}, \vec{w})$ = 77,9º.

Vectores ortogonales y vectores ortonormales.
Dos vectores son ortogonales, perpendiculares, si su producto escalar vale cero.
Si dos vectores ortogonales tienen módulo 1, se llaman ortonormales.
Los vectores de módulo 1 se llaman unitarios. Para cualquier vector $\vec{a}$, el vector $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ es unitario.
Ejemplo: $\vec{a}$ = (1, −2) y $\vec{b}$ = (4, 2) son ortogonales, pues $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = (1, −2) · (4, 2) = 4 − 4 = 0.