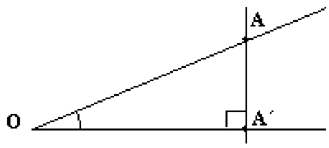
Tema 10. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Resumen

Razones trigonométricas de un ángulo

Dado un ángulo cualquiera, O, se define:

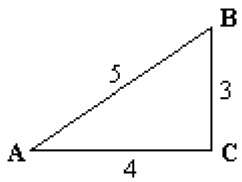


$$\text{sen}\,\hat{O} = \frac{AA´}{OA} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}};\ \cos\hat{O} = \frac{OA´}{OA} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}};$$

$$\text{tag}\,\hat{O} = \frac{AA´}{OA´} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

- El ángulo O puede medirse en grados o en radianes. (Un radian es un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que ha sido trazado). La relación entre ambas unidades es 360º = 2π radianes → La circunferencia completa abarca 2π radianes. Las calculadoras disponen de las teclas DEG y RAD, para grados y radianes, respectivamente.

Ejemplos: Para el triángulo adjunto se tiene:



$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{3}{5} = 0{,}6;\quad \cos\hat{A} = \frac{4}{5} = 0{,}8;\quad \text{tag}\,\hat{A} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Otras razones trigonométricas:

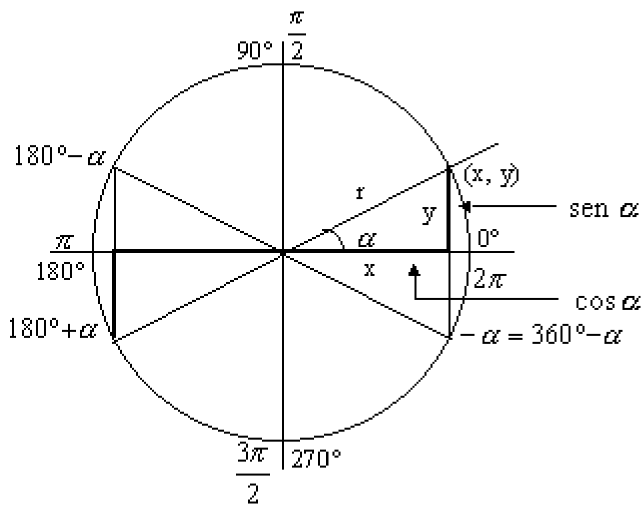
Cosecante: $\text{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$. Secante: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Cotangente: $\text{cotag}\alpha = \dfrac{1}{\text{tag}\,\alpha}$

Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas de un ángulo

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\qquad \text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha};\qquad 1 + \text{tag}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Razones trigonométricas en la circunferencia

Con ayuda de la circunferencia:



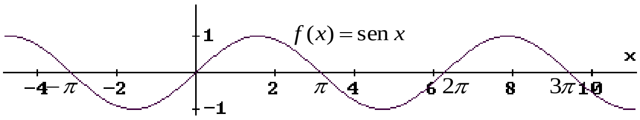
$\text{sen}\alpha = \dfrac{y}{r}$ → si r = 1, sen α = y;

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ → si r = 1, cos α = x

Como $x < r$ e $y < r$, para cualquier ángulo α se verifica:

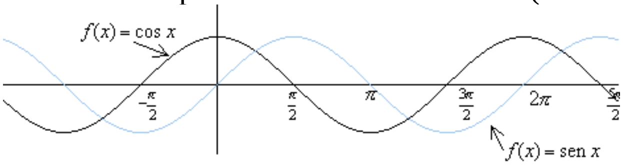
$$-1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1 \qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$$

La función seno: $f(x) = \text{sen}\,x$



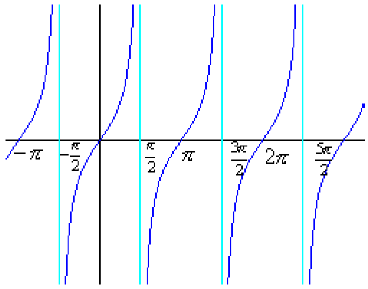
- Es periódica de periodo p = 2π. Esto es: $\text{sen}\,x = \text{sen}(x + 2\pi)$, para cualquier valor de x.
- Está definida siempre: Dom = **R**.
- Su recorrido es el intervalo [–1, 1].
- Es una función impar, pues $f(-x) = \text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\,x = -f(x)$. Por tanto, es simétrica respecto del origen.

<u>La función coseno</u>: Puede definir a partir del seno así: $f(x)=\cos x=\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, su gráfica será idéntica a la del seno pero con un desfase de π/2 (se traslada π/2 a la izda).



- Es periódica de periodo p = 2π. Esto es: $\cos x=\cos(x+2\pi)$, para cualquier valor de x.
- Dom = **R**. Recorrido: [–1, 1].
- Es una función par, pues $f(-x)=\cos(-x)=-\cos x=-f(x)$. Por tanto, es simétrica respecto del eje OX.

<u>La función tangente</u> **(** $f(x)=\text{tag } x$ **):** $f(x)=\text{tag } x=\frac{\text{sen } x}{\cos x}$



- Es periódica de periodo p = π: $\text{tag } x=\text{tag}(x+\pi)$.
- Está definida siempre que cos $x\neq 0$: esto es, si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
- Tiene por asíntotas verticales las rectas: $x=\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$.

<u>Ecuaciones trigonométricas</u>. La incógnita aparece ligada a una razón trigonométrica.

- <u>Ecuación a · sen (bx) = c</u> → sen (bx) = c/a ⇒ bx = arcsen (c/a) ⇒ x = [arcsen (c/a)]/b

Ejemplo: 2 sen 3x = 1 ⇒ $x=\frac{1}{3}\arcsin(1/2)$ ⇒ $x=\frac{1}{3}\cdot\begin{cases}30^\circ+360^\circ\cdot n\\150^\circ+360\cdot n\end{cases}$ ⇒ $x=\begin{cases}10^\circ+120^\circ\cdot n\\50^\circ+120\cdot n\end{cases}$

- <u>Ecuación a · cos (bx) = c</u> → cos (bx) = c/a ⇒ bx = arccos (c/a) ⇒ x = [arccos (c/a)]/b

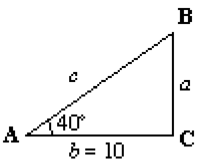
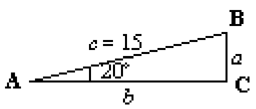
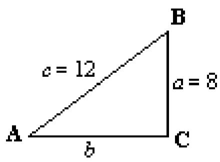
Ejemplo: $\sqrt{2}\cos x=1$ ⇒ $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇒ $x=\begin{cases}45^\circ+360^\circ\cdot n\\315^\circ+360\cdot n\end{cases}$

- <u>Ecuación a · tag (bx) = c</u> → tag (bx) = c/a ⇒ bx = arctag (c/a) ⇒ x = [arctag (c/a)]/b.

Ejemplo: $\tan x=2$ ⇒ $x=\arctan 2$ ⇒ $x=63{,}43^\circ+n\cdot 180^\circ$

Los valores de arcsen, arccos y arctag se hallan con la calculadora: $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$.

<u>Resolución de triángulos rectángulos</u>

❑ Sabiendo que A = 40º y b = 10 cm, halla a, c y B.  · B = 90º – A= 90º – 40º = 50º · $\cos 40=\frac{10}{c}$ ⇒ $c=\frac{10}{\cos 40}=\frac{10}{0{,}766}=13{,}05$ · $tag 40=\frac{a}{10}$ ⇒ a = 10 tag 40º = 10 · 0,839 = 8,39 cm.	❑ Sabiendo que A = 20º y c = 15 cm, halla a, b y B.  · B = 90º – A= 90º – 20º = 70º · $\cos 20=\frac{b}{15}$ ⇒ b = 15 cos 20º = 15 · 0,94 = 14,1 cm · $sen 20=\frac{a}{15}$ ⇒ a = 15 sen 20º = 15 · 0,342 = 5,13 cm.	❑ Sabiendo que a = 8 cm y c = 12 cm, halla b, A y B.  $b=\sqrt{12^2-8^2}=\sqrt{80}=8{,}94$ · sen A = $\frac{8}{12}=0{,}666...$ ⇒ A = arcsen 0,666 = 41,81º · B = 90º – 41,81º = 48,19º