Tema 11. (I) LUGARES GEOMÉTRICOS. LA CIRCUNFERENCIA **Resumen**

Se llama lugar geométrico a un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.

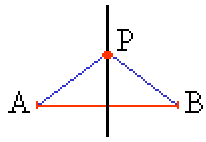
- Una vez descrita la *propiedad*, se puede optar por: 1) representarla; 2) encontrar su expresión matemática.

Ejemplos:

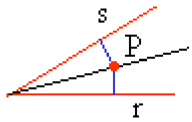
a) El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(1, -1)$ y $B(2, 0)$.

b) El lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(2, 3)$ es doble que la distancia a la recta $x - y + 2 = 0$.

c) La mediatriz de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos A y B. Esto es, si P es un punto de la mediatriz verificará d(P, A) = d(P, B). (Como sabes, la mediatriz es la recta perpendicular al segmento por su punto medio.)



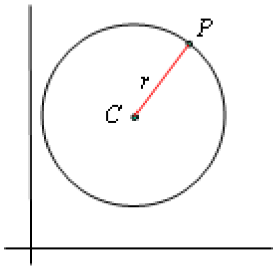
d) La bisectriz del ángulo determinado por dos rectas es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dichas rectas. Esto es, si P es un punto de la bisectriz verificará d(P, r) = d(P, s). (Como sabes, la bisectriz de un ángulo es la recta que pasando por el vértice divide al ángulo en dos partes iguales.)



La Circunferencia: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia del centro a un punto de la circunferencia se llama radio.

La ecuación de la circunferencia con centro en $C(a, b)$ y radio r, es

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$



Ejemplos:

a) La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 3 es: $x^2+y^2=9$

b) La ecuación de la circunferencia con centro en $C(-2, 1)$ y $r = 4$ es: $(x+2)^2+(y-1)^2=4^2$

- La expresión $x^2+y^2+mx+ny+p=0$ (*) es la ecuación general de una circunferencia. Su centro y radio pueden deducirse completando cuadrados.

Ejemplo: La ecuación $x^2+y^2-6x+8y=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=5^2$

Determinación de una circunferencia

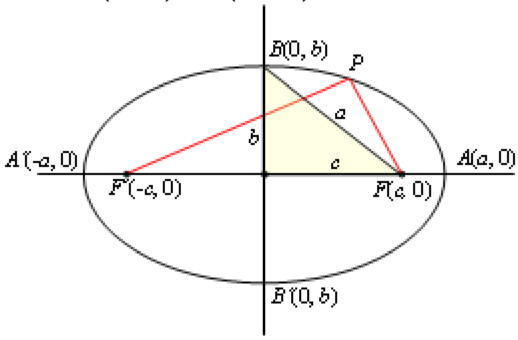
- Una circunferencia queda determinada dando su centro y su radio.
- Una circunferencia queda determinada por tres puntos no alineados. Su ecuación puede obtenerse sustituyendo sus coordenadas en la ecuación (*).
- Una circunferencia queda determinada dando dos puntos de ella diametralmente opuestos.
- Una ecuación queda determinada su centro y la ecuación de una recta tangente a ella.
- Una circunferencia queda determinada dando dos puntos de ella y la recta en la que esté su centro.

Para la obtención de su ecuación puede aplicarse alguna de las propiedades siguientes:

1. El centro de una circunferencia se halla en la mediatriz determinada por dos puntos de ella.
2. La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.

Tema 11. (II) CÓNICAS **Resumen**

<u>La elipse</u>: es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, *F* y *F´*, llamados focos, es constante → d(*P*, *F*) + d(*P*, *F´*) = constante



<u>Elementos de una elipse</u>
<u>Eje focal</u> a la recta que pasa por los dos focos.
<u>Eje secundario</u> es la mediatriz del segmento que determinan los focos. La elipse es simétrica respecto de ambos ejes.
<u>Centro</u> es el punto de corte de los dos ejes.
Los <u>vértices</u> de la elipse *A*, *A´*, *B*, *B´* son los puntos de corte de ésta con los ejes. El segmento *AA´* se llama <u>eje mayor</u>; su valor es 2*a*. El <u>semieje mayor</u> es *a*. Al segmento *BB´* se le llama <u>eje menor</u>. Su valor es 2*b*. El <u>semieje menor</u> es *b*. La distancia entre los focos se llama <u>distancia focal</u> y vale 2*c*: la <u>semidistancia focal</u> es *c*. La relación entre *a*, *b* y *c* es: $a^2 = b^2 + c^2$,

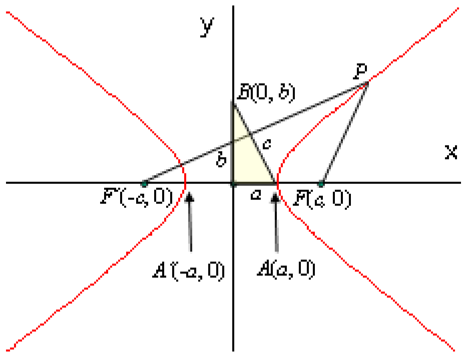
- La <u>ecuación reducida de la elipse</u> es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ejemplo: La elipse centrada en origen de semiejes *a* = 5 y *b* = 4 es: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

- Se llama <u>excentricidad</u> de una elipse al número $e = \frac{c}{a}$. Su valor está entre 0 y 1. La excentricidad mide el achatamiento de la elipse: cuanto mayor sea la excentricidad mayor será su achatamiento.

- La ecuación de la elipse centrada en el punto *P*(x_0, y_0) es: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \; a > b$.

<u>La hipérbola</u>: es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la diferencia de sus distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos, *F* y *F´*, llamados focos, es constante. Esto es, si *P* pertenece a la hipérbola: $\left| d(P, F) - d(P, F´) \right| = \text{constante}$



<u>Elementos de una hipérbola</u>
Como en la elipse: Ejes focal y secundario; centro; distancia focal: 2*c*; vértices; eje real; 2*a*; eje imaginario: 2*b*. Relación entre *a*, *b* y *c*: $c^2 = a^2 + b^2$.

<u>Ecuación reducida de la hipérbola</u> (centrada en (0, 0)): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

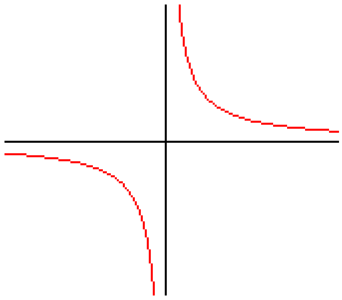
Ejemplo: La ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ es la de la hipérbola de semiejes *a* = 4 y *b* = 3.
Sus focos están en los puntos *F*(5, 0) y *F´*(–5, 0).

<u>Excentricidad</u>: $e = \frac{c}{a}$. Su valor siempre es mayor que 1.

- La ecuación de la hipérbola centrada en el punto *P*(x_0, y_0) es: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Asíntotas de una hipérbola. Son rectas hacia las que tiende a *pegarse* la curva. Su ecuación es $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Hipérbola equilátera. Tiene los semiejes real e imaginarios iguales, $a = b$. Su ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$.
Sus asíntotas son las rectas $y = \pm x$, es decir son perpendiculares entre sí y coinciden con las bisectrices de los cuadrantes.



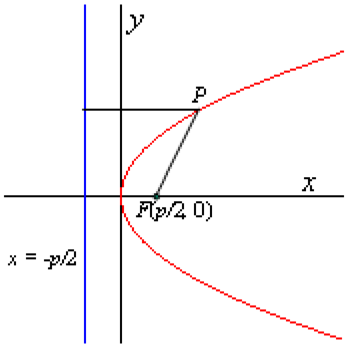
Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. Su ecuación es $xy = k$.

La parábola: es el lugar geométrico de los puntos del plano *P* que equidistan de un punto fijo *F*, llamado foco, y de una recta fija δ, llamada directriz. Esto es, si *P* es un unto de la parábola se cumple que: $d(P,F) = d(P,\delta)$

Elementos de la parábola
Eje de la parábola: es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. La parábola es simétrica respecto de su eje.
Vértice: es el punto de corte de la parábola y su eje.
La distancia del vértice al foco se llama distancia focal y se representa por $\frac{p}{2}$. El número *p*, distancia del foco a la directriz, es el *parámetro* de la parábola.

Ecuación de la parábola
- Parábola de eje horizontal el eje *OX*, con vértice en (0, 0), foco en $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y la directriz es la recta $\delta : x = -\frac{p}{2}$.

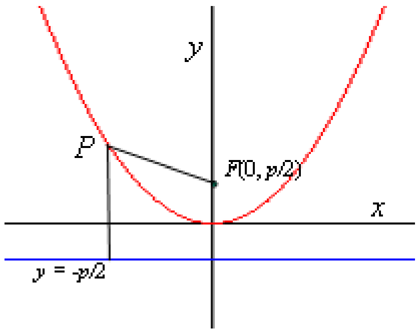
Su ecuación es $y^2 = 2px$
- Si el vértice está en el punto *V*(x_0, y_0) y eje paralelo al eje *OX*, su ecuación es: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.



Ejemplo: La parábola de foco el punto F(2, 0) y directriz la recta $\delta : x = -2$, tiene por parámetro $p = 4$, luego su ecuación es $y^2 = 2 \cdot 4x \Rightarrow y^2 = 8x$.

- De eje vertical el eje *OY* y vértice el origen: $x^2 = 2py$.

Si el vértice está en el punto *V*(x_0, y_0) y eje paralelo al eje *OY*, su ecuación es: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.
Esta ecuación se transforma en la conocida $y = ax^2 + bx + c$.



Ejemplo: La parábola de vértice el punto *V*(1, –3), de parámetro $p = 1$, y eje paralelo al eje de ordenadas tiene por ecuación $(x-1)^2 = 2(y+3)$, que desarrollada es: $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$