Tema 12. Límites de sucesiones Resumen

Algunas características y propiedades de las sucesiones

<u>Sucesión creciente</u>. Una sucesión es creciente si cada término es mayor o igual que el anterior: $a_n \le a_{n+1}$. Esto es, cuando $a_{n+1} - a_n \ge 0$.

Si $a_n < a_{n+1}$ la sucesión se llama estrictamente creciente.

Por ejemplo, la sucesión 1; 1,1; 1,111; … es (estrictamente) creciente.

Ejemplo: La sucesión $a_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$ es creciente.

Para demostrarlo hay que ver que $a_{n+1} - a_n \ge 0$.

En efecto:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+2} - \frac{2n-1}{n+2} = \frac{2n+1}{n+3} - \frac{2n-1}{n+2} = \frac{(2n+1)(n+2)-(2n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} =$$

$= \dfrac{5}{(n+3)(n+2)}$, expresión que siempre toma valores positivos.

<u>Sucesión decreciente</u>. Una sucesión es decreciente si cada término es menor o igual que el anterior: $a_n \ge a_{n+1}$; o lo que es lo mismo, cuando $a_{n+1} - a_n \le 0$.

Si $a_n > a_{n+1}$ la sucesión se llama estrictamente decreciente.

Por ejemplo, la sucesión 1; 1/2; 1/3; 1/4; … es estrictamente decreciente.

Ejemplo: La sucesión $a_n = \dfrac{n+3}{n+1}$ es estrictamente decreciente.

Para demostrarlo hay que ver que $a_{n+1} < a_{n+1}$. Esto es: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)+3}{(n+1)+1} = \dfrac{n+4}{n+2} < \dfrac{n+3}{n+1} = a_n$.

En efecto, multiplicando en cruz:

$$(n+4)\cdot(n+1) < (n+2)\cdot(n+3) \Leftrightarrow n^2+5n+4 < n^2+5n+6$$, que es cierto, pues 4 < 6.

<u>Sucesión constante</u>. Es aquella que tiene todos sus términos iguales: $a_n = k$, para todo *n*.

<u>Sucesión acotada</u>. Una sucesión está <u>acotada superiormente</u> si existe una constante *k*, tal que $a_n \le k$, para todo *n*.

Una sucesión está <u>acotada inferiormente</u> si existe una constante *k*, tal que $k \le a_n$, para todo *n*.

<u>Notas</u>: La cota superior más interesante es la más pequeña de todas; se llama <u>supremo</u>.
La cota inferior más interesante es la más grande de todas; se llama <u>ínfimo</u>.

Ejemplo: La sucesión $a_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$ está acotada superiormente por $k = 2$.

Para demostrarlo hay que ver que $a_n \le 2$. Esto es que $\dfrac{2n-1}{n+2} \le 2$, para todo *n*.

Si $\dfrac{2n-1}{n+2} \le 2 \Rightarrow 2n-1 \le 2(n+2) \Rightarrow 2n-1 \le 2n+4 \Rightarrow -1 \le 4$, que efectivamente es cierto.

<u>Introducción al concepto de límite de una sucesión</u>

→ La sucesión 1, 3, 5, 7,… toma cada vez valores más grandes, y supera cualquier número arbitrariamente grande; esto es, no tiene cota superior. Esta sucesión no tiene límite finito; se podría decir que es ilimitada, o que su límite es infinito (+ ∞).

→ La sucesión 3, –3, 3, –3, … va *saltando* indefinidamente de 3 a –3. Tampoco tiene límite. Es una sucesión oscilante.

→ La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8},\ldots$ toma cada vez valores más grandes, pero está acotada por el número 1. Su término general es $a_n = \frac{2n-1}{2n}$, que siempre toma valores menores que 1 (el numerador de la expresión es menor que su denominador: $2n-1<2n$), pero cada vez más cercanos a 1, como puede verse dando valores cada vez mayores a *n*:

n	1	5	10	50	100	…	1000	$n\to\infty$
$a_n = \frac{2n-1}{2n}$	0,5	0,9	0,95	0,99	0,995	…	0,9995	$a_n \to 1$

Esta sucesión está limitada por el número 1; se dice que tiende a 1 o que su límite es 1.
(Observa que la diferencia del valor de la sucesión con 1 es cada vez más pequeña: para *n* = 100, la diferencia es 0,005; para *n* = 1000, la diferencia es 0,0005…).
Para decir que el límite de esa sucesión vale 1 se indica de cualquiera de las formas siguientes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=1; \qquad \lim\frac{2n-1}{2n}=1; \qquad \frac{2n-1}{2n}\to 1$$

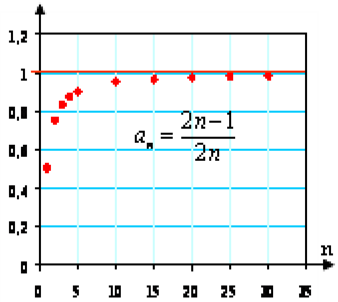

Fig. 12.1. a_n se acerca cada vez más a 1

→ En general, se dice que la sucesión a_n tiende a *a*, o que $\lim(a_n)=a$, si para valores grandes de *n* la diferencia $|a_n - a|$ es tan pequeña como se desee.

Así, por ejemplo, y como aproximación a una demostración, puede verse que para $a_n = \frac{2n-1}{2n}$ la diferencia $\left|\frac{2n-1}{2n}-1\right|<0{,}001$ a partir del término a_{500}. Lo que confirma que $\lim\frac{2n-1}{2n}=1$.

En efecto:

$$\left|\frac{2n-1}{2n}-1\right|<0{,}001 \Rightarrow \left|\frac{-1}{2n}\right|<0{,}001 \Rightarrow \frac{1}{2n}<0{,}001 \Rightarrow \frac{1}{0{,}002}<n \Rightarrow n>500$$

A partir del término a_{500} todos los siguientes valen más que 0,999. Por tanto, entre 0,999 y 1 hay infinitos términos: Como, además, la sucesión es creciente, cada vez su valor se acercará más a 1.

→ A las sucesiones que tienen límite se las llama <u>convergentes</u>.

<u>Propiedad</u>

Toda sucesión creciente y acotada superiormente tiene límite. El límite coincide con la cota superior mínima. (Análogamente, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente tiene límite. El límite coincide con la cota inferior máxima (la mayor de las cotas inferiores).

Ejemplo:

La sucesión $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ es creciente y acotada por *k* = 2; por tanto tiene límite, y vale 2.

Límite de algunas sucesiones

Las expresiones de algunas de las sucesiones que estamos estudiando son del tipo:

1) $a_n = 3n - 4$; 2) $a_n = \dfrac{3}{n+2}$; 3) $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2-5}$; 4) $a_n = \dfrac{n+3}{n+1}$; 5) $a_n = \dfrac{n^2-1}{2n+3}$

En todos estos casos, para determinar su límite basta con estudiar su tendencia.

Así:

1) $a_n = 3n - 4$ toma cada vez valores más grandes y positivos: $\lim(3n-4) = +\infty$

2) $a_n = \dfrac{3}{n+2}$ toma cada vez valores más próximos a cero: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n+2} = 0$. Estas sucesiones reciben el nombre de <u>sucesiones nulas</u>. (No es imprescindible indicar que $n \to \infty$; ya se sabe).

3) $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2-5}$ también toma cada vez valores más próximos a 0: $\lim \dfrac{2n-1}{n^2-5} = 0$.

4) $a_n = \dfrac{n+3}{n+1}$ toma cada vez valores más próximos a 1: $\lim \dfrac{n+3}{n+1} = 1$.

5) $a_n = \dfrac{n^2-1}{2n+3}$ toma cada vez valores más grandes y positivos: $\lim \dfrac{n^2-1}{2n+3} = +\infty$

En general:

- Las sucesiones de tipo polinómico $(a_n = P(n))$ tienden a $\pm\infty$, dependiendo del signo del término de mayor grado. (Los términos de menor grado no afectan al resultado del límite).

Ejemplos: a) $\lim\left(n^3 - 7n^2 - 1000\right) = +\infty$. b) $\lim\left(-n^2 + 17n + 1\right) = -\infty$.

- Son nulas las sucesiones del tipo $a_n = k / P(n)$, siendo k un número.

Ejemplos: a) $\lim \dfrac{-3}{2n-1} = 0$. b) $\lim \dfrac{3}{n^2 - 2n + 4} = 0$.

- Sucesiones del tipo $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$. Indeterminación $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} \to 0$, si el grado de $Q(n)$ es mayor que el de $P(n)$.

$a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} \to \infty$, si el grado de $Q(n)$ es menor que el de $P(n)$.

Ejemplos: a) $\lim \dfrac{5n+7}{n^2+3} = 0$. b) $\lim \dfrac{n^2-3n}{10n+90} = \infty$.

$a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} \to \dfrac{p}{q}$, si $P(n)$ y $Q(n)$ son del mismo grado, siendo p y q los coeficientes principales de $P(n)$ y $Q(n)$, respectivamente.

Ejemplos: a) $\lim \dfrac{3n^2-17}{2n^2-16n+49} = \dfrac{3}{2}$. b) $\lim \dfrac{-2n^2+5n}{n^2-7} = \dfrac{-2}{1} = -2$.

- La justificación de estos resultados puede hacerse transformando la sucesión dada en otra equivalente cuyo límite sea más fácil. Una transformación adecuada consiste en dividir el numerador y el denominador de la sucesión inicial por n elevada al mayor grado presente en la sucesión. En algunos de los ejemplos anteriores, dividendo por n^2 queda:

$$\to \lim \frac{5n+7}{n^2+3} \lim \frac{\frac{5n}{n^2}+\frac{7}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}} = \lim \frac{\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} = \left(\frac{0+0}{1+0}\right) = 0 .$$

$$\to \lim \frac{n^2-3n}{10n+90} = \lim \frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}}{\frac{10n}{n^2}+\frac{90}{n^2}} = \lim \frac{1-\frac{3}{n}}{\frac{10}{n}+\frac{90}{n^2}} = \left(\frac{1-0}{0+0}\right) = +\infty .$$

$$\to \lim \frac{-2n^2+5n}{n^2-7} = \lim \frac{\frac{-2n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{7}{n^2}} = \lim \frac{-2+\frac{5}{n}}{1-\frac{7}{n^2}} = \left(\frac{-2+0}{1-0}\right) = -\frac{2}{1} = -2 .$$

- Si en las expresiones aparecen raíces (cuadradas o de cualquier índice), cuando se presente la indeterminación ∞/∞, se puede utilizar el mismo proceso, teniendo en cuenta las leyes de introducción de factores en un radical. Así:

$\lim \sqrt{n} = \infty$; $\lim \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ (el denominador tiene mayor grado);

$\lim \sqrt{n^2-5n} = \infty$; $\lim \sqrt{\frac{9n-3}{25n+5}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Para hallar $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3n}}{3n-5}$ pueden dividirse los términos de la sucesión por *n*, así queda:

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{4n^2+3n}}{n}}{\frac{3n-5}{n}} = \lim \frac{\sqrt{\frac{4n^2+3n}{n^2}}}{\frac{3n-5}{n}} = \frac{\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3} .$$

- Indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$

Aparecen en diferencias de expresiones racionales o con raíces.
Algunas veces pueden resolverse operando en las sucesiones dadas; transformándolas en otras equivalentes. En el caso de raíces suele dar resultado multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

Ejemplos:

a) $\lim \left(\frac{n^2-2n}{2n-1} - \frac{n^2+1}{n}\right) = [\infty - \infty]$. Operando se tiene:

$$\lim \left(\frac{n^2-2n}{2n-1} - \frac{n^2+1}{n}\right) = \lim \left(\frac{(n^2-2n)n-(n^2+1)(2n-1)}{(n^2-2n)\cdot n}\right) =$$

$$= \lim \left(\frac{n^3-2n^2-(2n^3-n^2+2n-1)}{n^3-2n^2}\right) = \lim \frac{-n^3-n^2-2n+1}{n^3-2n^2} = -1 .$$

b) $\lim \left(\sqrt{2n^2-1} - \sqrt{n^2+1}\right)$ = [∞ – ∞]. Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada se tiene:

$$\lim\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}\right) = \lim\frac{\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}\right)} =$$

$$= \lim\frac{(2n-1)-(n+1)}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}} = \lim\frac{n-2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{n+1}} = (:n) = \lim\frac{1-2/n}{\sqrt{\frac{2n-1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n+1}{n^2}}} = \frac{1}{0} = \infty .$$

c) $\lim\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)$ = [∞ – ∞]. Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada se tiene:

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right) = \lim\frac{\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+5n}+2n\right)}{\left(\sqrt{4n^2+5n}+2n\right)} = \lim\frac{5n}{\sqrt{4n^2+5n}+2n} = \frac{5}{4}.$$

El número *e*: indeterminación [1^∞]

El número *e* (de Euler) es la base de los logaritmos neperianos. Este número, que es irracional, se define como el límite de la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Esto es: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Para hacerte una idea de cuál es el valor de *e* puede estudiarse su tendencia. Observa:

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2;\ a_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59374246;\ a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704813829;$$

$$a_{1000} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}716923932;\quad a_n \to e \approx 2{,}718281828.$$

→ Aplicando la definición de *e*, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, y las propiedades algebraicas de los límites, pueden darse otros resultados relaciones con el número *e*. Por ejemplo:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} = e^k$ 2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn} = e$ 3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$

- Otra forma de resolver estos límites (si son del tipo 1^∞) es aplicar la transformación:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{\,b_n}\right) = \left[1^\infty\right] = e^{\left(\lim_{n\to\infty}(a_n-1)\cdot b_n\right)}$$

Ejemplos:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n} = \left[1^\infty\right] = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^5 = e^5$; b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-n)}\right)^{(-n)}\right)^{-1} = e^{-1}$.

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \left[1^\infty\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-2n)}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-2n)}\right)^{(-2n)}\right]^{(-1/2)} = e^{-1/2}$.

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{\frac{3n^2}{n-6}} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}-1\right)\cdot\left(\frac{3n^2}{n-6}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-4}{n^2-4}\right)\cdot\left(\frac{3n^2}{n-6}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^3-12n^2}{n^3-6n^2-4n+24}\right)} = e^6$.