

**Tema 12. Sucesiones (progresiones) de números reales****Resumen**

Una sucesión es un conjunto de números dispuestos ordenadamente. A cada uno de los números se le llama término. Suelen designarse por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

Una sucesión puede definirse también como una función (o aplicación) de  $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  en el conjunto  $\mathbf{R}$  de los números reales. Así:  $a: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}$ , de manera que:

$$1 \rightarrow a(1) = a_1; \quad 2 \rightarrow a(2) = a_2; \quad \dots \quad n \rightarrow a(n) = a_n$$

La variable  $n$  indica la posición. Así, por ejemplo, el término séptimo se indicaría por  $a_7$ .

**Ejemplos:**

a) 2, 4, 6, 8, 10 ...  $\rightarrow a_1 = 2, \dots, a_5 = 10$ . Es la sucesión de números pares.

b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Es la sucesión de los números primos.

Término general de una sucesión

Es una fórmula que nos permite obtener el valor de cualquier término en función de la posición que ocupa.

**Ejemplos:**

a) La expresión  $a_n = 3n + 1$  es el término general de la sucesión 4, 7, 10, 13, ...

A partir de esa fórmula puede obtenerse, por ejemplo,  $a_{20} = 3 \cdot 20 - 1 = 59$ .

b) La sucesión de término general  $a_n = n^2 + 1$  es:

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2; \quad a_2 = 2^2 + 1 = 5; \quad a_3 = 3^2 + 1 = 10; \quad \dots, \quad a_{20} = 20^2 + 1 = 401.$$

Sucesiones recurrentes. Se definen dando un término y alguna ley que permita obtener los siguientes.

**Ejemplo:**

La sucesión  $a_n = 2a_{n-1} - 3$ , con  $a_1 = 4$ , es:

$$a_1 = 4; \quad a_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5; \quad a_3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7; \quad a_4 = 2 \cdot 7 - 3 = 11; \quad a_5 = 2 \cdot 11 - 3 = 19$$

Progresiones aritméticas

Una sucesión es una progresión aritmética cuando cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo, llamado diferencia de la progresión.

En general, si el primer término es  $a_1$  y la diferencia  $d$ , la progresión aritmética es:

$$a_1 \quad a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_2 + d \quad a_4 = a_3 + d \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} + d$$

- El término general de una progresión aritmética es:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

**Ejemplos:**

a) La sucesión 4, 7, 10, 13, ... es una p. a. de diferencia  $d = 3$  y primer término  $a_1 = 4$ .

Su término general es:  $a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 \Leftrightarrow a_n = 3n + 1$ .

b) La sucesión: 1, 8, 15, 22, ... es una p. a. de diferencia  $d = 7$  y primer término  $a_1 = 1$ .

Su término general es:  $a_n = 1 + (n-1) \cdot 7 \Leftrightarrow a_n = 7n - 6$  (Así, por ej:  $a_{25} = 7 \cdot 20 - 6 = 134$ .)

- La suma de los  $n$  primeros términos de una progresión aritmética es:  $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

**Ejemplo:**

La suma:  $4 + 7 + 10 + 13 + \dots + a_{200}$ , es igual a:  $S = \frac{(a_1 + a_{200}) \cdot 200}{2}$ .

Como  $a_1 = 4$  y  $d = 3 \Rightarrow a_{200} = 4 + 199 \cdot 3 = 601$ ; entonces:  $S_{200} = \frac{(4 + 601) \cdot 200}{2} = 60500$ .

Progresiones geométricas

Una sucesión es una progresión geométrica cuando cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, llamado razón de la progresión.

Si el primer término de una progresión geométrica es  $a_1$  y la razón es  $r$ , la progresión será:

$$a_1 \quad a_2 = a_1 r \quad a_3 = a_2 r \quad a_4 = a_3 r \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} r$$

- El término general de la progresión geométrica es:  $a_n = a_1 r^{n-1}$

**Ejemplos:**

a) La sucesión 1, 2, 4, 16, 32, ... es una progresión geométrica de razón  $r = 2$ .

Su término general será:  $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 2^9 = 512$ .

b) La sucesión 3, 0,3, 0,03, 0,003, 0,0003, ... es una progresión geométrica de razón  $r = 0,1$ .

Su término general será:  $a_n = 3 \cdot 0,1^{n-1} = \frac{3}{10^{n-1}}$ .

- La suma de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica es:  $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ .

- Si la razón,  $r$ , es menor que 1 en valor absoluto (esto es,  $|r| < 1$ ), puede hacerse la suma de infinitos términos consecutivos. Dicha suma vale:  $S = \frac{a_1}{1 - r}$ .

**Ejemplos:**

a) La suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 2, 4, 8, ... es:

$$S = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023.$$

b) La suma  $3 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots$  ( $r = 0,1$ ) vale:  $S = \frac{3}{1 - 0,1} = \frac{3}{0,9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$ .