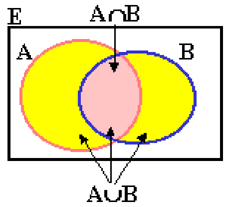
PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

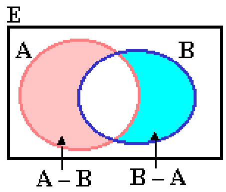
Resumen

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que acontezca un suceso aleatorio determinado, asignándosele un número, comprendido entre 0 y 1.
Un experimento se dice aleatorio cuando no se conoce con antelación lo que puede suceder.

Espacio muestral E. Es el conjunto de sucesos elementales a que da lugar la realización de un experimento aleatorio.
Ejemplo:
a) Al lanzar un dado con caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
b) Al extraer una carta de una baraja española, el espacio muestral está formado por 40 sucesos, uno por cada una de las cartas de la baraja: 10 de cada *palo* (oros, copas, espadas y bastos).

Un suceso es todo subconjunto de E. Si está determinado por un solo resultado se llama elemental; si está formado por varios se llama compuesto. Los sucesos suelen denotarse por letras mayúsculas A, B, C, ...
Suceso seguro: es el que ocurre siempre**.** Suele denotarse por E, como el espacio muestral.
Suceso imposible, denotado por ∅: no ocurre nunca.
Suceso contrario del suceso A**,** se denota por A^c (o también $\overline{A}$). Está compuesto por los elementos de E que no pertenecen a A. Por tanto, si ocurre A^c no ocurre A, y viceversa.





Operaciones con sucesos
Unión de A y B, A∪B, es un suceso que se cumple cuando lo hace alguno de los dos sucesos que lo componen. Esto significa que sucede A o B.
Intersección: $A \cap B$, es el suceso que se cumple cuando lo hacen los dos sucesos que lo componen: formado por los elementos comunes a A y a B.

- Cuando $A \cap B = \varnothing$, los sucesos A y B se dicen incompatibles.
- La diferencia**,** A – B, es el suceso formado por los elementos de A que no son de B (se cumple A pero no B).

Regla de Laplace. Si todos los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso *A* es: $P(A) = \dfrac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número total de casos posibles}}$

Propiedades de la probabilidad.
1. Probabilidad del suceso contrario de A: $P(A^c) = 1 - P(A)$**.**
2. Probabilidad de la unión de dos sucesos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Si los sucesos son incompatibles: $P(A \cap B) = 0$ y $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

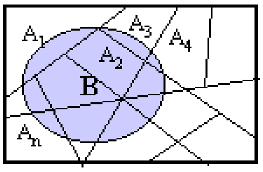
Probabilidad condicionada.
La probabilidad de un suceso A puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso B. En este caso se habla de probabilidad de A condicionada por B, y se denota por P(A/B).
Se calcula mediante la fórmula: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Análogamente, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. De donde se deduce que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Ejemplo:
Si de una urna con 4 bolas blancas (B) y 6 negras (N) se extraen dos bolas consecutivamente, la probabilidad de que la primera bola sea blanca es P(1ª B) = 4/10; pero la probabilidad de que la segunda bola sea blanca se ve condicionada por el resultado de la primera extracción. Si la primera fue blanca, entonces la P(2ª B/1ª B) = 3/9: quedan 9 bolas, de las cuales 3 son blancas. Pero si la primera bola fue N, entonces la P(2ª B/1ª N) = 4/9.
Para el estudio de estos experimentos puede ser útil elaborar un diagrama de árbol.

Sucesos independientes
Dos sucesos A y B son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.
Por tanto, si A y B son independientes: P(A/B) = P(A) y P(B/A) = P(B).
En consecuencia, si los sucesos A y B son independientes se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

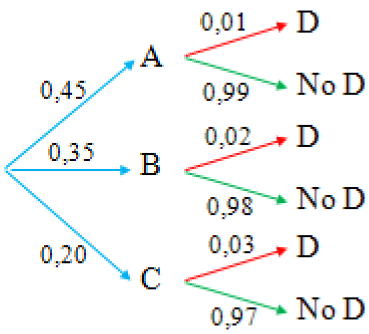
Probabilidad total
Si un suceso B está condicionado por otros A_i, incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$, entonces, la probabilidad total del suceso B es:



$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Fórmula de Bayes: Da la probabilidad condicionada de un suceso relacionado con la probabilidad total. Por ejemplo, si se ha cumplido B, ¿cuál es la probabilidad de que haya sucedido en A_i, $P(A_i/B)$. Su valor es: $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$.

Ejemplo:
Una fábrica de chocolates cuenta con tres máquinas de envasado. La máquina A envasa el 45% del total de cajas que salen al mercado; la máquina B, el 35% de las cajas; la C, el 20%. El 1% de las cajas de chocolate envasadas en la máquina A tiene defectos en el envase; en el caso de la máquina B, las defectuosas son del 2%; en la C, salen defectuosas el 3%. Si se elige una caja de esa fábrica:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A y tenga defecto en el envase?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga defecto en el envase?
c) Si la caja tiene defecto, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina C?
Solución:
En el diagrama de árbol adjunto se resume la información del problema. En él, las letras A, B y C indican los sucesos "la caja de chocolate ha sido envasada en la máquina A, B o C", respectivamente. La letra D, indica el suceso tener defecto en el envase; No D, lo contrario.



a) La probabilidad de que una caja proceda de A y tenga un defecto en el envasado es $P(A \cap D)$.
Su valor es: $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = 0,45 \cdot 0,01 = 0,0045$
b) Por la probabilidad total,

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$
$$= 0,45 \cdot 0,01 + 0,35 \cdot 0,02 + 0,20 \cdot 0,03 = 0,0175$$

c) La probabilidad de que una caja con defecto en el envase proceda de C se designa por P(C/D) y, por el fórmula de Bayes, vale:

$$P(C/D) = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(D)} = \frac{0,20 \cdot 0,03}{0,0175} = \frac{60}{175} \approx 0,343.$$

- Algo de combinatoria

Factorial de un número:

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1$ **Ejemplo**: 7! = 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1

Por convenio, factorial de cero se define como 1: 0! = 1 (También 1! = 1).

Números combinatorios:

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ → (se lee *n* sobre *r*) **Ejemplo**: $\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4!\cdot 11!} = 1365$

- La distribución binomial

Es una distribución de probabilidad discreta asociada a un experimento aleatorio definido por las siguientes características:
1) El resultado de una prueba del experimento aleatorio debe concretarse en dos únicas opciones, que podemos llamar: Si o No; éxito (E) o fracaso (F); se cumple o no se cumple..
2) Se realizan n ensayos del experimento, independientes unos de otros.
3) La probabilidad de éxito es constante a lo largo de las n pruebas y suele denotarse por p; esto es, P(E) = p. (La probabilidad de fracaso también es constante: vale 1 – p = q. Esto es, P(F) = q).
4) La variable aleatoria X, cuenta el número r de éxitos en las n pruebas: r = 0, 1, …, n.

Una variable binomial queda determinada por los parámetros n y p → se denota por B(n, p).

Probabilidad de r éxitos

Para la distribución de la variable binomial X = B(n, p), la probabilidad de r éxitos en los n intentos realizados, P(X = r) , r = 0, 1,…, n, viene dada por: $P(X=r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$

Ejemplo:
Supóngase que (en la Comunidad de Madrid) el número de forofos del Real Madrid C.F. es del 60%; siendo el otro 40% no forofo. Si se pregunta a n individuos de Madrid para determinar cuántos de ellos son forofos del RM, tal experimento puede estudiarse como una B(n, 0,6).
En el supuesto de que se pregunte a 8 individuos, será una B(8, 0,6). Si se llama éxito al suceso ser forofo del RM, podemos preguntarnos por el número de forofos entre los 8, resultando:
La probabilidad de r forofos, r = 0, 1, 2,…, 8, es:

$P(X=0) = \binom{8}{0} 0,6^0\cdot 0,4^8 = 1\cdot 0,00065536$; $P(X=1) = \binom{8}{1} 0,6^1\cdot 0,4^7 = 8\cdot 0,0098... = 0,00786$

… $P(X=5) = \binom{8}{5} 0,6^5\cdot 0,4^3 = 56\cdot 0,000497664 = 0,27869184$

Media y varianza: B(n, p)

Media: μ = n · p Varianza: σ² = n · p · q ⇒ Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$.

Ejemplo:
Con los mismos datos del ejemplo anterior: forofos del RM; B(n, 0,6).
Si se pregunta a n personas de Madrid, elegidas al azar, la media y la desviación típica de esa muestra serán:

μ = 100 · 0,6 = 60 → cada esperar que 60 de los 100 individuos preguntados sean del RM.

$\sigma = \sqrt{100\cdot 0,6\cdot 0,4} \approx 4,9$

Observación: Ampliación de probabilidad. Ampliación de la binomial (p. 294 a 296).