

Tema 13. PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Resumen

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que acontezca un suceso aleatorio determinado, asignándosele un número, comprendido entre 0 y 1.

Un experimento se dice aleatorio cuando no se conoce con antelación lo que puede suceder.

Espacio muestral E. Es el conjunto de sucesos elementales a que da lugar la realización de un experimento aleatorio.

Ejemplo:

- Al lanzar un dado con caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Al extraer una carta de una baraja española, el espacio muestral está formado por 40 sucesos, uno por cada una de las cartas de la baraja: 10 de cada *palo* (oros, copas, espadas y bastos).

Un suceso es todo subconjunto de E. Si está determinado por un solo resultado se llama elemental; si está formado por varios se llama compuesto. Los sucesos suelen denotarse por letras mayúsculas A, B, C, ...

Suceso seguro: es el que ocurre siempre. Suele denotarse por E, como el espacio muestral.

Suceso imposible, denotado por \emptyset : no ocurre nunca.

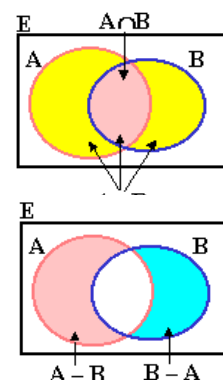
Suceso contrario del suceso A, se denota por A^c (o también \bar{A}). Está compuesto por los elementos de E que no pertenecen a A. Por tanto, si ocurre A^c no ocurre A, y viceversa.

Operaciones con sucesos

Unión de A y B, $A \cup B$, es un suceso que se cumple cuando lo hace alguno de los dos sucesos que lo componen. Esto significa que sucede A o B.

Intersección: $A \cap B$, es el suceso que se cumple cuando lo hacen los dos sucesos que lo componen: formado por los elementos comunes a A y a B.

- Cuando $A \cap B = \emptyset$, los sucesos A y B se dicen incompatibles.
- La diferencia, $A - B$, es el suceso formado por los elementos de A que no son de B (se cumple A pero no B).



Regla de Laplace. Si todos los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es: $P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número total de casos posibles}}$

Propiedades de la probabilidad.

1. Probabilidad del suceso contrario de A: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
 2. Probabilidad de la unión de dos sucesos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si los sucesos son incompatibles: $P(A \cap B) = 0$ y $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidad condicionada.

La probabilidad de un suceso A puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso B. En este caso se habla de probabilidad de A condicionada por B, y se denota por $P(A/B)$.

Se calcula mediante la fórmula: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Análogamente, $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. De donde se deduce que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Ejemplo:

Si de una urna con 4 bolas blancas (B) y 6 negras (N) se extraen dos bolas consecutivamente, la probabilidad de que la primera bola sea blanca es $P(1^a B) = 4/10$; pero la probabilidad de que la segunda bola sea blanca se ve condicionada por el resultado de la primera extracción. Si la

primera fue blanca, entonces la $P(2^a B/1^a B) = 3/9$: quedan 9 bolas, de las cuales 3 son blancas. Pero si la primera bola fue N, entonces la $P(2^a B/1^a N) = 4/9$. Para el estudio de estos experimentos puede ser útil elaborar un diagrama de árbol.

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

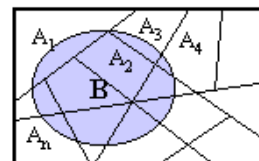
Por tanto, si A y B son independientes: $P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$.

En consecuencia, si los sucesos A y B son independientes se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Probabilidad total

Si un suceso B está condicionado por otros A_i , incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$, entonces, la probabilidad total del suceso B es:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$



Fórmula de Bayes: Da la probabilidad condicionada de un suceso relacionado con la probabilidad total. Por ejemplo, si se ha cumplido B, ¿cuál es la probabilidad de que haya sucedido en A_i , $P(A_i/B)$. Su valor es: $P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$.

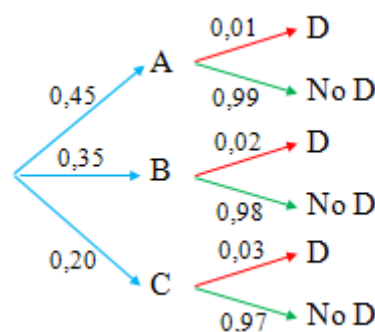
Ejemplo:

Una fábrica de chocolates cuenta con tres máquinas de envasado. La máquina A envasa el 45% del total de cajas que salen al mercado; la máquina B, el 35% de las cajas; la C, el 20%. El 1% de las cajas de chocolate envasadas en la máquina A tiene defectos en el envase; en el caso de la máquina B, las defectuosas son del 2%; en la C, salen defectuosas el 3%. Si se elige una caja de esa fábrica:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A y tenga defecto en el envase?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga defecto en el envase?
- c) Si la caja tiene defecto, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina C?

Solución:

En el diagrama de árbol adjunto se resume la información del problema. En él, las letras A, B y C indican los sucesos “la caja de chocolate ha sido envasada en la máquina A, B o C”, respectivamente. La letra D, indica el suceso tener defecto en el envase; No D, lo contrario.



a) La probabilidad de que una caja proceda de A y tenga un defecto en el envasado es $P(A \cap D)$.

Su valor es:

$$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) = 0,45 \cdot 0,01 = 0,0045$$

b) Por la probabilidad total,

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = 0,45 \cdot 0,01 + 0,35 \cdot 0,02 + 0,20 \cdot 0,03 = 0,0175$$

c) La probabilidad de que una caja con defecto en el envase proceda de C se designa por $P(C/D)$ y, por el fórmula de Bayes, vale:

$$P(C/D) = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(D)} = \frac{0,20 \cdot 0,03}{0,0175} = \frac{60}{175} \approx 0,343.$$

- Algo de combinatoria

Factorial de un número:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ejemplo: $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Por convenio, factorial de cero se define como 1: $0! = 1$ (También $1! = 1$).

Números combinatorios:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \rightarrow \text{(se lee } n \text{ sobre } r)$$

Ejemplo: $\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4! \cdot 11!} = 1365$

- La distribución binomial

Es una distribución de probabilidad discreta asociada a un experimento aleatorio definido por las siguientes características:

- 1) El resultado de una prueba del experimento aleatorio debe concretarse en dos únicas opciones, que podemos llamar: Si o No; éxito (E) o fracaso (F); se cumple o no se cumple..
- 2) Se realizan n ensayos del experimento, independientes unos de otros.
- 3) La probabilidad de éxito es constante a lo largo de las n pruebas y suele denotarse por p ; esto es, $P(E) = p$. (La probabilidad de fracaso también es constante: vale $1 - p = q$. Esto es, $P(F) = q$).
- 4) La variable aleatoria X , cuenta el número r de éxitos en las n pruebas: $r = 0, 1, \dots, n$.

Una variable binomial queda determinada por los parámetros n y $p \rightarrow$ se denota por $B(n, p)$.

Probabilidad de r éxitos

Para la distribución de la variable binomial $X = B(n, p)$, la probabilidad de r éxitos en los n

intentos realizados, $P(X = r)$, $r = 0, 1, \dots, n$, viene dada por: $P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$

Ejemplo:

Supóngase que (en la Comunidad de Madrid) el número de forofos del Real Madrid C.F. es del 60%; siendo el otro 40% no forofo. Si se pregunta a n individuos de Madrid para determinar cuántos de ellos son forofos del RM, tal experimento puede estudiarse como una $B(n, 0,6)$.

En el supuesto de que se pregunte a 8 individuos, será una $B(8, 0,6)$. Si se llama éxito al suceso ser forofo del RM, podemos preguntarnos por el número de forofos entre los 8, resultando:

La probabilidad de r forofos, $r = 0, 1, 2, \dots, 8$, es:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^8 = 1 \cdot 0,00065536; \quad P(X = 1) = \binom{8}{1} 0,6^1 \cdot 0,4^7 = 8 \cdot 0,0098... = 0,00786$$

$$\dots P(X = 5) = \binom{8}{5} 0,6^5 \cdot 0,4^3 = 56 \cdot 0,000497664 = 0,027869184$$

Media y varianza: $B(n, p)$

Media: $\mu = n \cdot p$

Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \Rightarrow$ Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Ejemplo:

Con los mismos datos del ejemplo anterior: forofos del RM; $B(n, 0,6)$.

Si se pregunta a n personas de Madrid, elegidas al azar, la media y la desviación típica de esa muestra serán:

$$\mu = 100 \cdot 0,6 = 60 \rightarrow \text{cada esperar que 60 de los 100 individuos preguntados sean del RM.}$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,6 \cdot 0,4} \approx 4,9$$