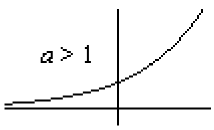
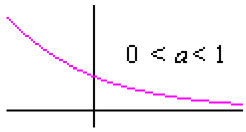
Tema 14. FUNCIONES EXPONENCIALES, REALES, LOGARÍTIMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

Resumen

La función exponencial. Es de la forma $f(x) = a^x \Leftrightarrow y = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$.

Características fundamentales:





- Su valor siempre es positivo. Esto es: $f(x) = a^x > 0$, para todo x.
- Si la base $a > 1$, la función siempre es creciente.
- Si la base $0 < a < 1$, la función siempre es decreciente.
- El eje *OX*, la recta $y = 0$, es una asíntota horizontal de la función; hacia $-\infty$ si $a > 1$, o hacia $+\infty$ si $0 < a < 1$.

Nota: La función general $f(x) = a^{g(x)}$ está definida siempre que lo esté $g(x)$.

Logaritmos. Definición: $\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$

Las bases usuales son $a = 10$ y $a = e$. A los logaritmos en base 10 se les llama decimales; los logaritmos en base e se llaman neperianos.

- El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido

Ejemplos:

$\log_2 8 = 3$, pues $2^3 = 8$. $\log_5 25 = 2$, pues $5^2 = 25$.

$\log_{10} 10000 = 4$, pues $10^4 = 10000$. $\log_{10} 1 = 0$, pues $10^0 = 1$.

$\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$ $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$

Propiedades de los logaritmos

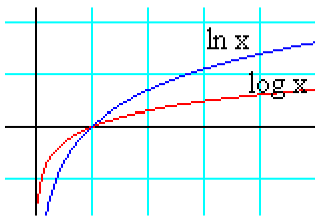
$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$ $\log_a A^n = n \log_a A$ $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

$\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$ $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$

Ejemplo: a) $\log 5 + \log 20 = \log (5 \cdot 20) = \log 100 = 2$.

b) $\log 5^7 = 7 \cdot \log 5$; $\log 3^x = x \cdot \log 3$. c) $\log \dfrac{1}{20} = \log 1 - \log 20 = -\log 20$.

La función logarítmica.



La más sencilla es $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$).

Para las bases usuales, $a = 10$ y $a = e$: $f(x) = \log x$ y $f(x) = \ln x$.

Propiedades fundamentales:

- Dominio: $\mathbf{R}^+ \rightarrow x > 0$. Recorrido: $(-\infty, +\infty)$.
- El eje *OY*, la recta $x = 0$, es asíntota vertical de su curva.

Si $a > 1$ (que es lo usual), la función es creciente.

Si $0 < a < 1$, la función será decreciente.

Nota: La función general $f(x) = \log_a g(x)$ está definida siempre que $g(x) > 0$.

- Como $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow x = a^{f(x)}$, se observa que a una función logarítmica está asociada otra función exponencial. Para ser más precisos, las funciones exponencial y logarítmica son inversas; esto es, si aplicamos sucesivamente el logaritmo y la exponencial en la misma base, volvemos al punto de partida. O sea: 1) $\log_a a^x = x$ 2) $a^{\log_a x} = x$

Ecuaciones exponenciales. Son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente.
Casos inmediatos:

- Ecuación $a^x = b$, $a > 0$ y $b > 0$. Se resuelven aplicando logaritmos.

Ejemplo:

$$2^x = 15 \Rightarrow \log 2^x = \log 15 \Rightarrow x \log 2 = \log 15 \Rightarrow x = \frac{\log 15}{\log 2} = \frac{1,176...}{0,301...} = 3,90689...$$

- Ecuación $a^b = x$. (Si a es negativo puede que esta expresión no tenga sentido)

Es un ejercicio común de potenciación. Puede resolverse con la calculadora.

Ejemplo: $4^{3,2} = x$. Con la calculadora se obtiene $x = 84,4885$.

- Ecuación $x^a = b$, $b > 0$. Puede resolverse aplicando logaritmos (antilogaritmos).

Ejemplo:

$x^4 = 15 \rightarrow$ Aplicando logaritmos: $x^4 = 15 \Rightarrow \log x^4 = \log 15 \Rightarrow 4 \log x = \log 15 \Rightarrow$

$$\log x = \frac{\log 15}{4} = \frac{1,176091259}{4} = 0,294022814 \Rightarrow x = \text{antilog } 0,29022814 = 1,967989671$$

Para calcular antilogaritmo, pulsar: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\log}$ 0,29022814

- Ecuación $\log_a x = b$ Se resuelve empleando la definición de logaritmo y la potenciación.

Ejemplo: $\log x = 3,5 \Rightarrow x = 10^{3,5} \Rightarrow x = 3162,27766$.

- Ecuación $\log_a b = x$. Puede resolverse aplicando logaritmos o la fórmula del cambio de base: $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$. Si las bases son 10 o e se resuelven directamente con la calculadora; en cualquier otro caso hay que aplicar la definición de logaritmo.

Ejemplo:

$$\log_4 50 = x \Rightarrow 4^x = 50 \Rightarrow \log 4^x = \log 50 \Rightarrow x \log 4 = \log 50 \Rightarrow x = \frac{\log 50}{\log 4} = 2,82$$

- Ecuación $\log_x a = b$. Se resuelve aplicando la definición de logaritmo.

Ejemplo: $\log_x 1000 = 5 \Rightarrow x^5 = 1000 \Rightarrow x = 1000^{1/5} = 3,98107$.

Otras ecuaciones logarítmicas y exponenciales

En algunos casos se resuelven aplicando las propiedades de los logaritmos, haciendo un cambio del tipo $a^x = t$, sacando factor común o aplicando alguna otra propiedad algebraica.

Ejemplos:

a) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} = 9 \Rightarrow 3^{x-1} \cdot (3-2) = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 9 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$.

b) $4^x + 2^{x+3} - 20 = 0 \Rightarrow 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 20 = 0 \Rightarrow 2^x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64+80}}{2} = \dfrac{-8 \pm 12}{2} = 2 \Rightarrow x = 1$

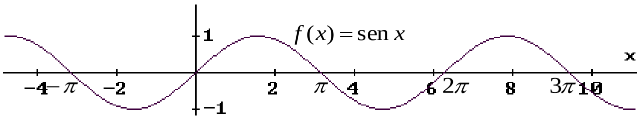
(La solución –10 no vale.)

c) $\log(x+4) + \log(x-1) = \log(x^2+5) \Rightarrow \log[(x+4)\cdot(x-1)] = \log(x^2+5) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+4)\cdot(x-1) = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = x^2 + 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$.

Funciones trigonométricas

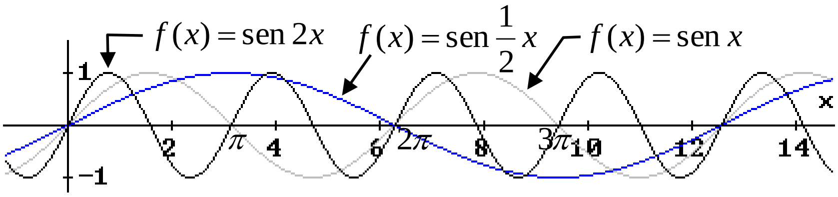
La función seno: $f(x) = \text{sen } x$



- Es periódica de periodo p = 2π. Esto es: $\text{sen } x = \text{sen}(x + 2\pi)$, para cualquier valor de x.
- Está definida siempre: Dom = **R**.
- Su recorrido es el intervalo [–1, 1].
- Es una función impar, pues $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen } x = -f(x)$. Por tanto, es simétrica respecto del origen.

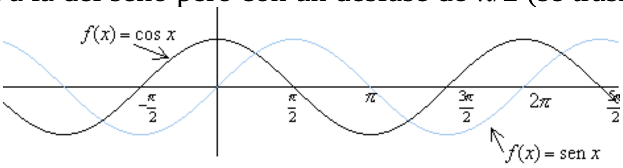
Otras funciones: La función $f(x) = \text{sen } kx$ contrae o dilata la función sen *x*. Si *k* > 1, se contrae; si *k* < 1, se dilata.

Ejemplo. Para *k* = 2 y *k* = 1/2, damos las gráficas en la siguiente figura.



El periodo de $f(x) = \text{sen } 2x$ es p = π; el de $f(x) = sen \frac{1}{2}x$ es p = 4π.

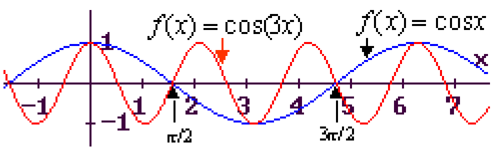
La función coseno: Puede definir a partir del seno así: $f(x) = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, su gráfica será idéntica a la del seno pero con un desfase de π/2 (se traslada π/2 a la izda).



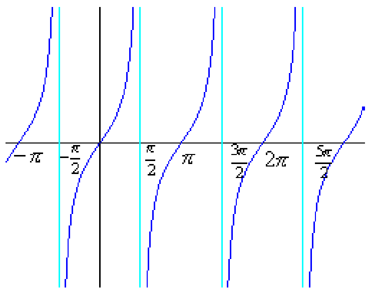
- Es periódica de periodo p = 2π. Esto es: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$, para cualquier valor de x.
- Dom = **R**. Recorrido: [–1, 1].
- Es una función par, pues $f(-x) = \cos(-x) = -\cos x = -f(x)$. Por tanto, es simétrica respecto del eje *OX*.

Otras funciones: Ejemplo

$f(x) = \cos 3x$ tiene periodo $p = \frac{2\pi}{3}$.



La función tangente ($f(x) = \text{tag } x$): $f(x) = \text{tag } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$



- Es periódica de periodo $p = \pi$: $\text{tag } x = \text{tag}(x + \pi)$.
- Está definida siempre que cos *x* ≠ 0: esto es, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Tiene por asíntotas verticales las rectas: $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$.