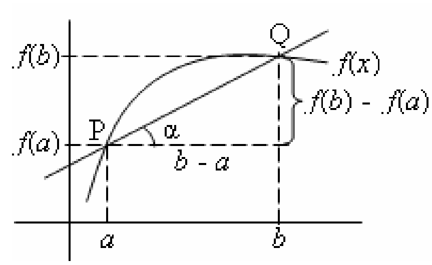
Tema 16. DERIVADAS Resumen



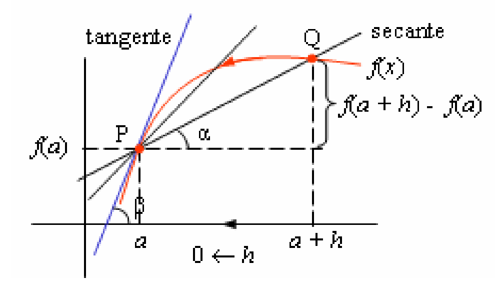
Tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo [a, b] se define como

$$TVM[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La *TVM* da la variación unitaria de $f(x)$ entre a y b.

La *TVM* coincide con la tangente del ángulo α que da la pendiente de la recta secante a la curva $f(x)$ que pasa por los puntos P y Q de ella.

Derivada de una función en un punto



La función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$

si existe el límite: $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Mide la tasa de variación instantánea en el punto.
Este límite recibe el nombre de $f'(a)$, y existe cuando resulta un número real finito.

Ejemplo: Dada la función $f(x)=-x^2+4x$, su derivada en el punto $x = 3$ vale

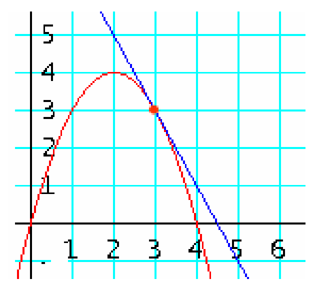
$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}.$$

Como $f(3+h)=-(3+h)^2+4(3+h)=-h^2-2h+3$ y $f(3)=3$, se tendrá:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h+3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-h-2)}{h}=\lim_{h\to 0}(-h-2)=-2.$$

Luego, $f'(3)=-2$.

Interpretación geométrica de la derivada



La derivada, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P = (a, f(a))$.

La ecuación de dicha recta tangente será: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

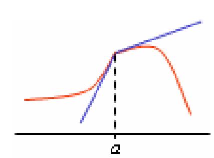
Ejemplo: La recta tangente a la función $f(x)=-x^2+4x$ en el punto de abscisa x = 3, será: $y' - f(3) = f'(3)(x-3)$.

Y como $f(3)=3$ y $f'(3)=-2$ se obtiene: $y-3=-2(x-3) \Rightarrow y=-2x+9$

Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.

Para que una función sea derivable en un punto son precisas dos condiciones:

1. Que la función sea continua en dicho punto.
2. Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.



Geométricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.
Las derivadas laterales no coinciden en los *puntos angulosos*, en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.

- La relación entre derivabilidad y continuidad es la siguiente:

"si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$"

El recíproco no es cierto. Esto es, $f(x)$ es continua en $x = a \not\Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$.

Reglas de derivación para las operaciones con funciones

1. Derivada de una constante por una función:

$$F(x)=k\cdot f(x)\ \rightarrow\ \left(F(x)\right)'=\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

2. Derivada de una suma o diferencia de funciones:

$$F(x)=f(x)+g(x)\ \rightarrow\ \left(F(x)\right)'=\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

3. Derivada de un producto de funciones:

$$F(x)=\left(f\cdot g\right)(x)=f(x)\cdot g(x)\ \rightarrow\ \left(F(x)\right)'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

4. Derivada de la opuesta de una función:

$$F(x)=\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}\ \rightarrow\ \left(F(x)\right)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

5. Derivada de un cociente de funciones:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ \rightarrow\ \left(F(x)\right)'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

6. Derivada de la función compuesta:

$$F(x)=f(g(x))\ \rightarrow\ \left(F(x)\right)'=\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS			
Función simple	**Derivada**	**Función compuesta**	**Derivada**
$y=c$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=x^n,\ \forall\, n\in \mathbf{R}$	$y'=nx^{n-1}$	$y=(f(x))^n,\ \forall\, n$	$y'=n(f(x))^{n-1}f'(x)$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=a^x,\ a>0$	$y'=a^x\ln a$	$y=a^{f(x)},\ a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$	$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=f'(x)\cos f(x)$
$y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen} x$	$y=\cos f(x)$	$y'=-f'(x)\operatorname{sen} f(x)$
$y=\operatorname{tag} x$	$y'=1+\operatorname{tag}^2 x$	$y=\operatorname{tag} f(x)$	$y'=f'(x)(1+\operatorname{tag}^2 f(x))$
$y=\operatorname{arcsen} x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\operatorname{arcsen} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$y=\operatorname{arctag} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$y=\operatorname{arctag} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

Notación: La función derivada suele denotarse: $f'(x)$; $y'=f'(x)$; $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$ o $y'=\dfrac{dy}{dx}$.