Tema 16. (II) APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS: ESTUDIO DE UNA FUNCIÓN

Resumen

• El signo de la derivada primera de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la determinación de máximos y mínimos relativos.

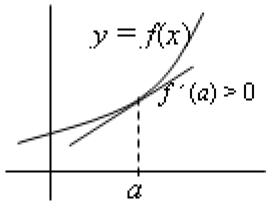
<u>Crecimiento y decrecimiento (monotonía)</u>

• $f(x)$ es creciente en un punto $x = a$ si $f(a-h) \leq f(a) \leq f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño. (Si se sustituye $\leq$ por $<$, se hablaría de crecimiento estricto.)

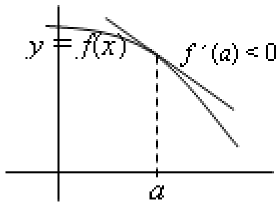
• $f(x)$ es decreciente en un punto $x = a$ si $f(a-h) \geq f(a) \geq f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.

• La función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un intervalo cuando crece (decrece) en todos los puntos de él.

<u>Caracterización mediante la derivada primera</u>



• <u>Crecimiento</u>: Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $x = a$.
En general, si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo.



• <u>Decrecimiento</u>: Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $x = a$.
Si una función $f(x)$ es tal que $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es decreciente ese el intervalo.

• <u>Máximos</u>. El punto x_1 es un máximo relativo cuando la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha.
Por tanto: x_1 es un máximo si: $f'(x_1^-) > 0$, $f'(x_1) = 0$, $f'(x_1^+) < 0$

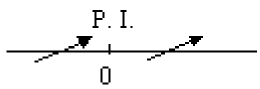
• <u>Mínimos</u>. El punto x_2 es un mínimo relativo cuando la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.
Por tanto: x_2 es un mínimo si: $f'(x_2^-) < 0$, $f'(x_2) = 0$, $f'(x_2^+) > 0$

• La determinación de los <u>puntos singulares</u> (aquellos en los que la derivada vale 0, llamados también estacionarios; y los puntos en lo que la función no está definida) nos permitirá obtener el crecimiento, el decrecimiento, los máximos y los mínimos.

<u>Advertencia</u>. No siempre que $f'(x) = 0$ se tiene un máximo o un mínimo; ni siquiera esto es una condición necesaria.

• Puede haber mínimo sin que $f'(x) = 0$: Así, por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ y en ese punto no es derivable la función.

• Puede suceder que $f'(x) = 0$ y no haya mínimo ni máximo. Así pasa en el punto $x = 0$ para la función $f(x) = x^3$ Su derivada, $f'(x) = 3x^2$, se anula en $x = 0$, pero:



Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
Por tanto, en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo. Hay un punto de inflexión.

Trazado de gráficas con ayuda de la derivada primera

Dada la función $y = f(x)$, para dibujarla es útil el siguiente proceso:

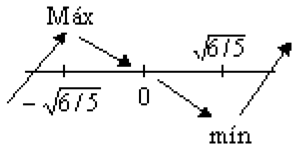
1. Determinar los puntos en los que no está definida $f(x)$.
2. Hallar la derivada $f´(x)$.
3. Calcular las soluciones de la ecuación $f´(x) = 0$ (puntos singulares).
4. Marcar sobre el eje *OX* los puntos singulares y aquellos en los que la función no está definida. Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos.
5. Estudiando el signo de la derivada en cada intervalo anterior, determinar si la función es creciente o decreciente. (Basta con probar un punto de cada intervalo y ver si $f´(x)$ es positiva o negativa.)
6. Deducir (de lo anterior) dónde se dan los máximos y los mínimos, si es el caso.
7. Trazar la gráfica ajustándose a la información obtenida y dando algunos de sus puntos, entre los correspondientes a los puntos singulares y a los cortes con los ejes de coordenadas.

Ejemplo: Trazado de la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 2x^3$.

1. Está definida siempre.

2 y **3**. $f´(x) = 5x^4 - 6x^2 \Rightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(5x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{\frac{6}{5}},\ x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$

4, **5** y **6**. Marcamos los puntos:



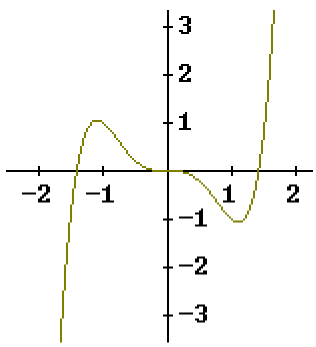
- Si $x < -\sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = -2$), $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-\sqrt{\frac{6}{5}} < x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ hay máximo
- Si $0 < x < \sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = 1$), $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\Rightarrow$ en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.
- Si $x > \sqrt{\frac{6}{5}}$, (por ejemplo, $x = 3$), $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente $\Rightarrow$ en $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$ hay mínimo

7. Dando algunos valores se obtiene la gráfica adjunta.

Para $x = 0$, $f(0) = 0 \rightarrow$ punto (0, 0)

Para $x = -\sqrt{\frac{6}{5}} \approx -1{,}1$, $f(-\sqrt{6/5}) \approx 1{,}05 \rightarrow$ punto (–1,1, 1,05)

Para $x = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}1$, $f(\sqrt{6/5}) \approx -1{,}05 \rightarrow$ punto (1,1, –1,05)



Los cortes con el eje *OX* son las soluciones de $x^5 - 2x^3 = 0$, que son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2} \rightarrow$ puntos $(-\sqrt{2},0)$, (0, 0) y $(\sqrt{2},0)$.